TD 5 – Morphismes

Exercice 1.

1. **i.** Montrer que pour tout $n > 1$, $n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ en tant que groupes.
   ii. Pourquoi n'a-t-on pas d'isomorphismes d'anneaux ?
2. Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $I = \{[0]_6, [3]_6\}$.
   i. Montrer que I est un idéal de A.
   ii. Montrer que A/I est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Soit m et n premiers entre eux, et $\Phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $\Phi(\alpha) = m \cdot \alpha$.
   i. Est-ce un morphisme de groupes ? Et d'anneaux ?
   ii. Montrer que c'est un automorphisme.
4. Soit m et $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $g = \textsc{pgcd}(m,n)$ et $h = \textsc{ppcm}(m,n) = mn/g$. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$. *Indication. Considérer les décompositions en facteurs premiers des entiers m, n, g et h.*

Exercice 2. *L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*

Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ un anneau.
2. On considère la fonction f de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même qui à $a + b\sqrt{2}$ associe $a - b\sqrt{2}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
3. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x \cdot f(x)$. Montrer que pour tout x, $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$ et $N(xy) = N(x)N - y)$.
4. Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$. Donner des exemples d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 3. *Anneau $\mathbb{Q}^{(m)}$*

Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $\mathbb{Q}^{(m)}$ l'ensemble des nombres rationnels a/b où $\textsc{pgcd}(b,m) = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}^{(m)}$ est un anneau, inclus dans $\mathbb{Q}$.
2. Caractériser les inversibles de $\mathbb{Q}^{(m)}$.
3. On définit $\Phi : \mathbb{Q}^{(m)} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $\Phi(a/b) = [a]_m[b]_m^{-1}$.
   i. Montrer que Φ est bien définie, *c'est-à-dire que si $a/b = c/d$, alors* $[a]_m[b]_m^{-1} = [c]_m[d]_m^{-1}$.
   ii. Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.
   iii. Calculer l'image et le noyau de Φ.