
TD 8 – Algèbre matricielle

Exercice 1.*Calculs*

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Pour chacune des quatre matrices, vue d'abord comme matrice sur \mathbb{Q} , puis comme matrice sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, effectuer les calculs suivants :

1. Calculer une décomposition $P \cdot L \cdot E$ de la matrice.
2. Calculer une décomposition $C \cdot R$ de la matrice.
3. Déterminer le rang de la matrice.
4. Déterminer si la matrice est inversible, et le cas échéant calculer son inverse.
5. Calculer le noyau de la matrice.

Exercice 2.*Inversion de matrice*

1. Soit P une matrice de permutation, c'est-à-dire une matrice qui contient exactement un 1 par ligne et par colonne, et des 0 ailleurs.
 - i. Justifier que P est une matrice inversible.
 - ii. Montrer que l'inverse de P est P^T .
2. Soit L une matrice carrée, triangulaire inférieure.
 - i. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la diagonale que L pour qu'elle soit inversible.
 - ii. Montrer que son inverse, si elle existe, est triangulaire inférieure.
 - iii. Calculer les éléments diagonaux de son inverse, si elle existe.
 - iv. Adapter les résultats à une matrice triangulaire supérieure.
3.
 - i. Écrire un algorithme qui prend en entrée une matrice triangulaire inférieure et renvoie son inverse.
 - ii. Analyser sa complexité.
 - iii. Connaissez-vous un algorithme plus rapide ?
4. Soit A une matrice carrée dont on connaît une décomposition $P \cdot L \cdot E$.
 - i. Comment déterminer si A est inversible ?
 - ii. Comment calculer son inverse ?