Partie 1. Structures de données

4. Tables de hachage

Bruno Grenet

Université Grenoble Alpes – IM²AG
L3 Mathématiques et Informatique
UE Algorithmique

https://membres-ljk.imag.fr/Bruno.Grenet/Algorithmique.html

Table des matières

Rappel : le TAD dictionnaire

Définition

- Ensemble de couples (clé, valeur)
- Opérations :
  - DictionnaireVide
  - Insérer
  - Supprimer
  - Rechercher

Hypothèse simplificatrice : les clés sont des entiers

- Théorie : toute donnée est codée en binaire $\rightarrow$ interprétation comme un entier
- Pratique : on se ramène à des entiers, mais pas forcément de cette façon

Quelles implantations ?

Dictionnaire de n éléments, clés entre 0 et $N - 1$

Tableau

- Taille : N
- DictionnaireVide : $O(N)$
- Insérer : $O(1)$
- Supprimer : $O(1)$
- Rechercher : $O(1)$

Liste chaînée

- Taille : n
- DictionnaireVide : $O(1)$
- Insérer : $O(n)$
- Supprimer : $O(n)$
- Rechercher : $O(n)$

Arbre binaire de recherche — *si équilibré*

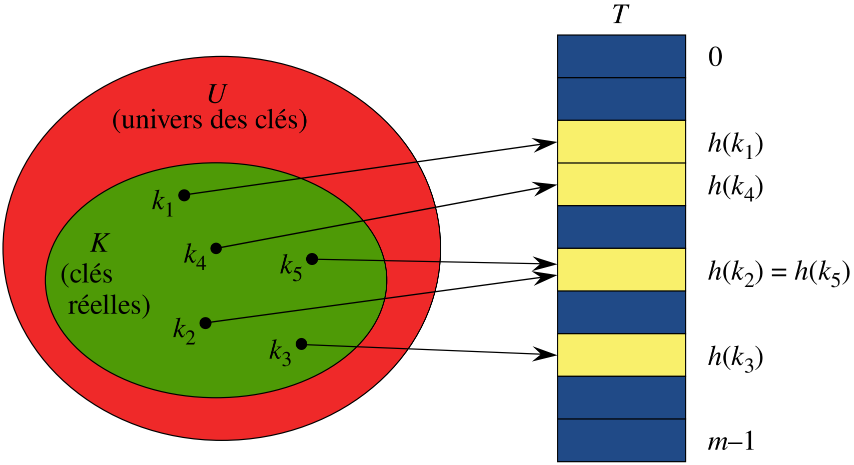
- Taille : n
- DictionnaireVide : $O(1)$
- Insérer : $O(h)$ — $O(\log n)$
- Supprimer : $O(h)$ — $O(\log n)$
- Rechercher : $O(h)$ — $O(\log n)$

Tableau dynamique — *trié*

- Taille : $O(n)$
- DictionnaireVide : $O(1)$
- Insérer : $O(n)$ — $O(n)$
- Supprimer : $O(n)$ — $O(n)$
- Rechercher : $O(n)$ — $O(\log n)$

Table des matières

Tables de hachage



$$|K| = n \ll N = |U|$$

Source : T. H. Cormen, C. Leiserson, R. Riverst, et C. Stein, Introduction à l'algorithmique. 2ème éd. Dunod, 2004. (modif.)

Formalisation

Clés

Univers des clés possibles : $U = \{0, \ldots, N-1\}$

Ensemble des clés utilisées : $K \subset U$, de taille n

Tableau de taille m

- Indices entre 0 et $m-1$
- Une case peut
  - être vide
  - contenir une, ou plusieurs, valeurs

Fonction de hachage

- Fonction $h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$

$\mathcal{T} = (T, h) \to$ couple (k, v) stocké en case $T_{[h(k)]}$

Questions à résoudre

Collisions

- Que fait-on si $h(k_1) = h(k_2)$?
  - Plusieurs valeurs dans une case (liste chaînée, etc.)
  - Utiliser une autre case ?
- Est-ce que $h(k_1) = h(k_2)$ arrive souvent ?
  - Comment choisir h ?

Complexités

- Taille : $m \rightarrow$ choix de m par rapport à n et N ?
- Création : $O(m)$
- Insertion / suppression / recherche :
  1. calcul de $h(k)$
  2. insertion / suppression / recherche en case $h(k)$

$\rightarrow$ Coût du calcul de $h(k)$? Coût des opérations dans une case ?

Table des matières

Problématique des fonctions de hachage

Contexte

- Choix d'une fonction $h : \{0, \ldots, N-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$
- Fonction utilisée pour un ensemble de clés K de taille $n \ll N$

Collisions évitables ?

- Avec $N \gg m$, forcément des collisions $h(k_1) = h(k_2)$!
- Mais on stocke n clés : si $n \leq m$?
  - Pour un ensemble de clés, possible de trouver h sans collision
  - Mais… on ne connaît pas les clés à l'avance !

Problématique

- On veut choisir h avant de connaître les clés
- On voudrait éviter les collisions entre clés… sans les connaître !

Pas le choix : **une fonction de hachage doit être choisie aléatoirement !**

Modèle idéalisé des fonctions de hachage

On tire h uniformément parmi les fonctions de $\{0, \dots, N-1\}$ dans $\{0, \dots, m-1\}$

Avantage et inconvénient

- Avantage : très bonnes propriétés probabilistes
  - Pour tout $k_1 \neq k_2$, $\Pr_h[h(k_1) = h(k_2)] = 1/m$
- Inconvénient : totalement **irréaliste** $\rightarrow$ comment tirer et stocker h ?

Représentation de h

- Pour chaque k, une valeur $h(k) \rightarrow$ tableau H de taille N
- Tirage de $h \rightarrow$ tirage uniforme et indépendant de chaque $H_{[k]}$ dans $\{0, \dots, m-1\}$

Remarques

- Parfois utilisé en théorie car
  - les preuves sont (un peu) simples
  - les résultats obtenus parfois (très) proches du comportement pratique
- Objectif : modèle réaliste avec propriétés proches

Modèle universel des fonctions de hachage

On fixe un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions de hachage et on tire h uniformément dans $\mathcal{H}$

Définition

Un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions $h : \{0, \ldots, N-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$ est universel si pour tout $k_1 \neq k_2$, $\Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(k_1) = h(k_2)] \leq 1/m$.

Remarques

- Probabilité que deux éléments collisionnent $\leq$ probabilité dans le modèle idéalisé
- L'ensemble de toutes les fonctions est universel… mais irréaliste !
- On *sait* construire des ensembles $\mathcal{H}$ universels réalistes

Ensemble universel *intéressant*

- Ensemble pas trop gros $\to$ représentation de h assez petite
- Tirer uniformément $h \in \mathcal{H}$ doit être efficace
- Calculer $h(k)$ doit être rapide

Un exemple d'ensemble universel : le hachage multiplicatif

Définition

Soit $\mathcal{H}_p^{N,m} = \{h_{a,b} : 0 < a < p, 0 \leq b < p\}$ la famille de fonctions définies par

$$h_{a,b} : \begin{array}{ccc} \{0,\dots,N-1\} & \to & \{0,\dots,m-1\} \\ k & \mapsto & ((ak+b) \bmod p) \bmod m \end{array}$$

où p est un nombre premier $> N$ $\# \mathcal{H}_p^{N,m} = p(p-1)$

Efficacité

- Représentation de $h_{a,b}$: $(a, b, p) \to$ taille : $O(\log N)$ bits
- Tirage aléatoire de $h_{a,b}$: tirage de $a \in \{1,\dots,p-1\}$ et $b \in \{0,\dots,p-1\}$
- Calcul de $h_{a,b}(k)$ en $O(\log N \log\log N)$ opérations sur les bits

$\hookrightarrow O(1)$

Théorème

La famille $\mathcal{H}_p^{N,m}$ est universelle (pour tout N, m et $p \geq N$)

Outil : système linéaire *modulo p*

Lemme

Soit $k_1 \neq k_2$ et $u \neq v$ dans $\{0, \ldots, p-1\}$, alors il existe un unique couple a, $b \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $u \equiv_p ak_1 + b$ et $v \equiv_p ak_2 + b$.

$$\begin{cases} u \equiv_p ak_1 + b \\ v \equiv_p ak_2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv_p u - ak_1 \\ u - v \equiv_p a(k_1 - k_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv_p u - ak_1 \\ a \equiv_p (u-v)(k_1-k_2)^{-1} \end{cases}$$

L'unique solution est $\begin{cases} a = (u-v)(k_1-k_2)^{-1} \bmod p \\ b = u - ak_1 \bmod p. \end{cases}$

Preuve du théorème

Théorème (réécrit)

Pour tout $k_1 \neq k_2$, $\Pr_{a,b}[h_{a,b}(k_1) = h_{a,b}(k_2)] \leq 1/m$

× $k_1 \neq k_2 \Rightarrow ak_1+b \not\equiv_p ak_2+b$ car a inversible mod p.

× On pose $\begin{cases} u = ak_1+b \bmod p \\ v = ak_2+b \bmod p \end{cases}$. Alors $u \neq v$ et $\begin{cases} h_{a,b}(k_1) = u \bmod m \\ h_{a,b}(k_2) = v \bmod m \end{cases}$.

Donc $h_{a,b}(k_1) = h_{a,b}(k_2) \iff u \equiv_m v$.

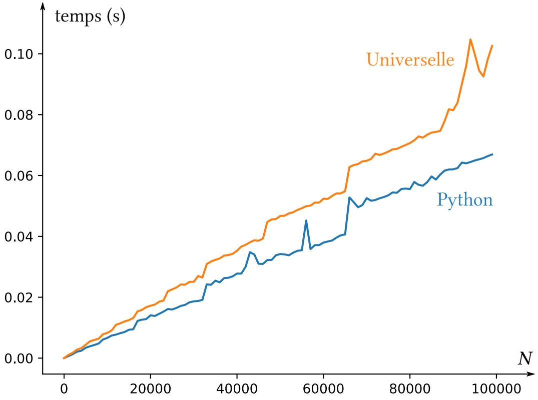
Et même $\Pr_{a,b}[h_{a,b}(k_1) = h_{a,b}(k_2)] \underset{\text{(lemme)}}{=} \Pr_{u,v}[u \equiv_m v]$ où $u, v \in \{0, \dots, p-1\}$, $u \neq v$.

× $\Pr[u \equiv_m v] \leq \lfloor p/m \rfloor / (p-1) \leq 1/m$.

Bilan sur la famille universelle

Utilisation de la famille

- Création du dictionnaire
  - tirage aléatoire de a et b
  - tirage de $p > N$ premier
- Stockage : tableau + entiers a, b, p



Autres familles universelles

- $h_a(k) = (ak \bmod 2^w) \operatorname{div} 2^{w-\ell}$ — *quasi*-universelle
- $h_{\vec{c}}(k) = ((\sum_i c_i k^i) \bmod p) \bmod m$ — *fortement* universelle

Table des matières

Problématique

Contexte

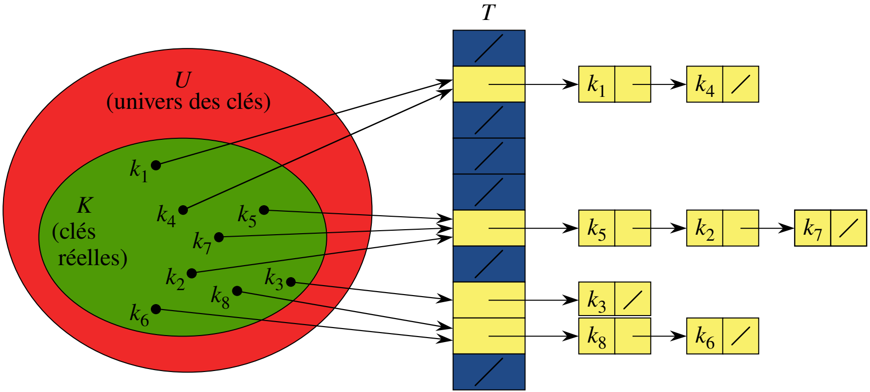
- Table $\mathcal{T}$ avec fonction de hachage $h : \{0, \dots, N-1\} \to \{0, \dots, m-1\}$
- Ensemble de clés K

Que fait-on si $h(k_1) = h(k_2)$ pour deux clés $k_1 \neq k_2$?

Deux (familles de) solutions

- Mettre plusieurs éléments dans une même case
  - Résolution par *chaînage*
  - *Hachage parfait*
- Trouver une autre case libre : *adressage ouvert*

Résolution par chaînage : principe



Source : T. H. Cormen, C. Leiserson, R. Riverst, et C. Stein, Introduction à l'algorithmique. 2ème éd. Dunod, 2004. (modif.)

Résolution par chaînage

Chaque case de T contient une liste chaînée

Algorithmes

RECHERCHER(D, k) :

1. Calcul de $h(k)$
2. Rechercher k dans $T_{[h(k)]}$

INSÉRER(D, k, v) :

1. Calcul de $h(k)$
2. Insérer (k, v) dans $T_{[h(k)]}$

SUPPRIMER(D, k) :

1. Calcul de $h(k)$
2. Supprimer k de $T_{[h(k)]}$

- Complexités : $O(\ell(k))$ où $\ell(k)$ est la taille de la liste $T_{[h(k)]}$

Quelle efficacité ?

- Une opération coûte $O(L)$, où $L = \max_{k \in K} \ell(k) \to$ quelle taille maximale ?

Efficacité de la résolution par chaînage

Théorème

Soit $\mathcal{T} = (T, h)$ où $\#T = m$ et h est tirée uniformément dans un ensemble universel. Si $\mathcal{T}$ contient n éléments et que les collisions sont résolues par chaînage, l'espérance de la complexité de l'Insertion et de la Recherche est $O(n/m)$.

Preuve

Il suffit de s'intéresser au coût d'une recherche infructueuse.

On veut mq pour $k \notin \mathcal{T}$, $\mathbb{E}[\ell(k)] = \Theta(n/m)$

$$\ell(k) = \#\{k' \in K : h(k') = h(k)\}$$

$$\mathbb{E}[\ell(k)] = \sum_{k' \in K} \Big(1 \times \underbrace{\Pr[h(k) = h(k')]}_{\leq 1/m} + 0 \times \cancel{\Pr[h(k) \neq h(k')]} \Big)$$

$$\leq n/m.$$

Bilan sur le chaînage

Complexité

- Complexité espérée de chaque opération : $O(\alpha)$ où $\alpha = \frac{n}{m}$ est le *taux de remplissage*
- Si le taux est autour de 1 : $O(1)$ en moyenne
- Attention : l'espérance du pire cas n'est pas $O(\alpha)$! $\mathbb{E}[\max_k \ell(k)] \neq \max_k \mathbb{E}[\ell(k)]$

> La résolution par chaînage est efficace *en moyenne*, mais certaines opérations peuvent être coûteuses

Pourquoi des listes chaînées ?

- Chaque case contient un ensemble de (clé,valeur) $\rightarrow$ un dictionnaire par case !
  - Tas ou ABR équilibré $\rightarrow$ complexité moyenne $O(\log \alpha)$
  - Et pourquoi pas des tables de hachage ? *hachage parfait*
- Intérêt des listes chaînées :
  - Simplicité
  - Suffisant si $\alpha = O(1)$

L'adressage ouvert

Si la case pour insérer (k, v) est occupée, trouver une autre case !

Formellement

- m fonctions de hachage $h_1, \ldots, h_m$
  - 1^{er} essai : INSERTION en case $h_1(k)$
  - $2^{\text{ème}}$ essai : INSERTION en case $h_2(k)$
  - …
  - $m^{\text{ème}}$ essai : INSERTION en cas $h_m(k)$
- Condition : pour tout k, $\{h_1(k), \ldots, h_m(k)\}$ est une *permutation* de $\{0, \ldots, m-1\}$

Avantage

- Tableau T standard, pas de liste chaînée / ABR / etc. dans les cases

Constructions d'adressage ouvert

Construire les m fonctions à partir d'une (ou deux) fonctions de hachage

Quelques possibilités pratiques

- Sondage linéaire : $h_i(k) = (h(k) + i) \bmod m$
- Sondage quadratique : $h_i(k) = (h(k) + ai^2 + bi) \bmod m$ *(bien choisir a et b !)*
- Sondage binaire : $h_i(k) = h(k) \oplus i$ *(si $m = 2^\ell$)*
- Double hachage : $h_i(k) = (h^{(1)}(k) + ih^{(2)}(k)) \bmod m$ *(conditions sur $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$)*
- …

Algorithmes

- Recherche : explorer $T_{[h_1(k)]}, T_{[h_2(k)]}, \dots$
  - si on trouve $k \to$ gagné !
  - si on trouve une case vide $\to$ k n'est pas dans T
- Insertion : explorer jusqu'à trouver une case vide
- Suppression : Rechercher puis supprimer

Analyse de l'adressage ouvert

Hypothèse : pour tout k, $\{h_1(k), \ldots, h_m(k)\}$ est une permutation aléatoire

Théorème

Si le facteur de remplissage est $\alpha = n/m < 1$, l'espérance du nombre de cases visitées pour une RECHERCHE infructueuse est $\leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Preuve Hypothèse $\iff$ on fait une recherche en tirant des indices aléatoirement

$$\mathbb{E}_{m,n} = \mathbb{E}[\#\text{cases visitées}]$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{m,n} = \frac{m-n}{m} \times 1 + \left(1 - \frac{m-n}{m}\right)\left(1 + \mathbb{E}_{m-1,n-1}\right) = (1-\alpha) + \alpha\left(1 + \mathbb{E}_{m-1,n-1}\right) \\ \mathbb{E}_{m,0} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Par récurrence, $\mathbb{E}_{m,n} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ pour tout m, $n < m$.

Bilan sur l'adressage ouvert

Idée de principe

- Une seule table principale, un seul élément par case
- Si une case est occupée, aller ailleurs !
- Plusieurs solutions pour *aller ailleurs*

Complexité espérée (modèle idéalisé)

	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{9}{10}$
INSERTION ou RECHERCHE infructueuse : $\frac{1}{1-\alpha}$	2	10
RECHERCHE réussie : $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$ (admis)	$\leq 1,387$	$\leq 2,559$

Pour aller plus loin : *hachage du coucou*

- Deux fonctions de hachage $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ *deux emplacements possibles par clé*
- INSERTION de (k, v) :
  - Insertion en case $h^{(1)}(k)$
  - Si la case contenait (k', v'), on le déplace à son autre emplacement
  - Et récursivement…
- Et ça marche !

Conclusion sur la résolution des collisions

Les collisions sont inévitables !

Chaînage, hachage parfait, …

- Gérer les collisions en mettant plusieurs éléments par case
- Complexité liée au nombre maximal d'éléments par case et à la structure de données

Adressage ouvert

- Gérer les collisions en cherchant une autre case libre
- Complexité liée au nombre de cases à inspecter

Dans les deux cas

- Complexité liée au nombre de collisions $\rightarrow$ à minimiser !
- Si table trop remplie : nombreuses collisions $\rightarrow$ combiner avec des tableaux dynamiques

Conclusion sur les tables de hachage

Tables de hachage

- Structure de données très efficace, et très répandue
- Autres structures dérivées des tables de hachage (filtres de Bloom, etc.)
- Constructions pratiques inspirées de la théorie

Gestion des collisions

- Résultats présentés :
  - Chaînage : complexité espérée $O(1)$ dans le modèle universel
  - Adressage ouvert : complexité espérée $O(1)$ dans le modèle idéalisé
- D'autres résultats :
  - Hachage parfait : complexité pire cas $O(1)$ dans le modèle universel
  - Adressage ouvert : même résultat dans le modèle (fortement-)universel *difficile*

Construction de familles universelles

- $h_{a,b}(k) = (((ak + b) \bmod p) \bmod m)$ fournit une famille universelle
- Autres constructions de familles universelles
- Meilleures garanties : familles fortement universelles

Pour aller plus loin

Fonctions de hachage

- Utiles au delà des tables de hachage (empreinte numérique, etc.)
- Riche théorie, basée sur les probabilités
- Hachage d'autres objets (chaînes de caractères, graphes, …)
- Autre type de fonctions de hachage : fonctions de hachage cryptographiques

Dans les langages de programmation

- Tables de hachages souvent proposées (dictionnaires)
- Fonctions de hachage non aléatoires
- Comportement souvent bon en pratique, mais possibles mauvaises surprises

Et en pratique

- Fonctions de hachages utilisées partout !
- Applications *critiques* $\rightarrow$ utilité de la théorie

Conclusion sur les structures de données

Types abstraits de données

- Version algorithmique des types
- Construction hiérarchique
- Dynamique versus statique

Les TAD étudiés

- Tableau, liste, arbre binaire
- File, Pile, File de priorité (tas)
- Tableau dynamique
- Dictionnaire : ABR et tables de hachage

Quelques concepts rencontrés

- Complexité *amortie*
- Structure probabiliste et *espérance* de complexité