Machines de Turing

Exercice 1. *Questions*

Répondre aux questions suivantes, où on considère le modèle standard de machine de Turing, sans variante.

1. Une machine peut-elle écrire un $\square$ sur son ruban ?
2. La tête de la machine peut-elle se trouver à la même position dans deux étapes successives ?
3. Une étape de calcul peut-elle laisser le ruban non modifié ?
4. Combien de cases du ruban peuvent être modifiées à chaque étape ?
5. Si la machine possède n états et l'alphabet k symboles, combien de transitions la machine possède-t-elle au maximum ? Et au minimum ?

Exercice 2. *Exemples de machines*

1. Décrire des machines de Turing effectuant les calculs suivants.
   - **i.** Étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$, la machine calcule son *complémentaire* $\overline{w}$ définit par $\overline{w}_i = 1 - w_i$ (par ex., 0010 devient 1101).
   - **ii.** Étant donné un entier $n > 0$ écrit en binaire, la machine calcule $n - 1$.
   - **iii.** Étant donné $a\#b$ où a et b sont deux entiers écrits en binaire, la machine calcule $a + b$.
   - **iv.** Étant donné un mot $w \in \{a, b\}$, la machine calcule $w\#w$.
   - **v.** Étant donné un mot $u \oplus v$ où $u, v \in \{0,1\}$, la machine calcule $w = u \text{ XOR } v$.
   - **vi.** Étant donné deux entiers a et b, en binaire, sur deux rubans différents, la machine calcule $a + b$ sur un troisième ruban, en temps linéaire en la taille de a et b.
2. Décrire des machines de Turing reconnaissant les langages suivants.
   - **i.** $L = \{w \in \{0,1\}^* : w$ est l'écriture binaire d'un entier pair$\}$
   - **ii.** $L = \{w \in \{0,1\}^* : w$ ne contient jamais trois 0 à la suite$\}$
   - **iii.** $L = \{w \in \{0,1,\#\}^* : w = u\#v$ où $u, v \in \{0,1\}^*$ ont la même longueur$\}$
   - **iv.** $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$
   - **v.** $L = \{w \in \{a,b\}^* : w$ contient autant de a que de $b\}$
   - **vi.** $L = \{w \in \{a,b\}^* : w$ contient deux fois plus de a que de $b\}$
   - **vii.** $L = \{w \in \{a,b\}^* : w$ ne contient pas deux fois plus de a que de $b\}$

Exercice 3. *Qu'est-ce qu'elles font ?*

On considère les deux tables de transitions suivantes.

Table 1

q_0	a	a	$\rightarrow$	q_a
	b	b	$\rightarrow$	q_b
q_a	a	a	$\rightarrow$	q_a
	b	b	$\rightarrow$	q_a
	$\square$	$\square$	$\leftarrow$	q'_a
q_b	a	a	$\rightarrow$	q_b
	b	b	$\rightarrow$	q_b
	$\square$	$\square$	$\leftarrow$	q'_b
q'_a	a	a	$\rightarrow$	oui
q'_b	b	b	$\rightarrow$	oui

Table 2

q_0	0	$\square$	$\rightarrow$	q_1
q_1	0	X	$\rightarrow$	q_2
	X	X	$\rightarrow$	q_1
	$\square$	$\square$	$\rightarrow$	oui
q_2	0	0	$\rightarrow$	q_3
	X	X	$\rightarrow$	q_2
	$\square$	$\square$	$\leftarrow$	q_4
q_3	0	X	$\rightarrow$	q_2
	X	X	$\rightarrow$	q_3
q_4	0	0	$\leftarrow$	q_4
	X	X	$\leftarrow$	q_4
	$\square$	$\square$	$\rightarrow$	q_1

1.
   - **i.** Dessiner l'automate correspondant à la table **1** et lister l'ensemble des états et l'alphabet.
   - **ii.** Écrire la suite des configurations obtenues sur les entrées `aaba`, `bab` et `aab`.

iii. Décrire le langage reconnu par la machine.

2. **i.** Dessiner l'automate correspondant à la table **2** et liste l'ensemble des états et l'alphabet.

ii. Écrire la suite des configurations obtenues sur les entrées 0, 00, 000 et 000000.

On souhaite maintenant comprendre ce que fait cette machine. Supposons que l'entrée est 0^n pour un certain $n > 1$.

i. Montrer que si n est impair, la machine se bloque dans l'état q_3.

ii. Montrer que si n est pair, après n étapes de calcul, la configuration est $(q_2, (X0)^{n/2-1}X, \square)$. En déduire qu'après quelques étapes supplémentaires, la machine est dans la configuration $(q_1, \square, (X0)^{n/2-1}X)$.

iii. En déduire que depuis une configuration $(q_1, \square, w)$ où $w \in \{0, X\}^*$ où w possède k symboles 0, la machine soit se bloque en q_3 si k est impair, soit atteint une configuration $(q_1, \square, w')$ où w' possède $k/2$ symboles 0.

iv. En déduire le langage reconnu par la machine.

Exercice 4. *Variantes*

1. On considère un modèle de machine de Turing où la tête de lecture est initialement placée sur la dernière lettre (la plus à droite) de l'entrée. Ce modèle est-il équivalent au modèle standard ?

2. **i.** On considère une machine de Turing $\mathcal{M}$ qui, à chaque transition, déplace sa tête vers la droite (mais jamais vers la gauche). Montrer que $L(\mathcal{M})$ est régulier, c'est-à-dire peut être reconnu par un automate fini.

ii. Montrer que le résultat reste vrai si on autorise la machine à soit déplacer sa tête vers la droite, soit la garder immobile.