Damien GRÉGOIRE
Antonio GOMARIZ PEÑALVER
Ignacio MARTÍN SANTAMARÍA
Cédric LE BROUSTER

encadrés par M. Éric BOURREAU

ÉTUDE DU PROBLEME ETERNITY II

Index

1 Prologue....1
2 Présentation du problème....1
3 Problème des équerres-triangles-carrés....3
  3.1 Présentation du problème....3
  3.2 Résultats Obtenus.....6
    3.2.1 Quand aucune pièce n'est placée sur le panneau....8
    3.2.2 Avec les 5 indices placés sur le panneau....10
4 Problème des corolles:....15
  4.1 Méthode de croissance de la corolle....16
  4.2 Évaluation des résultats:....18
  4.3 Élimination de pièces....21
    4.3.1 Un triangle-équerre....21
    4.3.2 Quatre triangles-équerres....23
  4.4 Carrés réales 4X4....24
  4.5 Conclusion....25
5 Problème des polyominos....26
6 Conclusion....28
7 ANNEXE....29
  7.1 Comparaison équerres 3x3 réelles - corolles....29
    7.1.1 Pièce 61....29
    7.1.2 Pièce 72....32
    7.1.3 Pièce 98....34
    7.1.4 Pièce 112....36
    7.1.5 Pièce 190....38
    7.1.6 Pièce 249....40
  7.2 Avec un triangle-équerre....42
    7.2.1 Pièce 61....42
    7.2.2 Pièce 72....43
    7.2.3 Pièce 98....44
    7.2.4 Pièce 112....45
    7.2.5 Pièce 190....46
    7.2.6 Pièce 249....47
  7.3 Avec quatre triangles-équerres....48
    7.3.1 Pièce 61....48
    7.3.2 Pièce 72....49
    7.3.3 Pièce 98....50
    7.3.4 Pièce 112....51
    7.3.5 Pièce 190....52
    7.3.6 Pièce 249....53

1 Prologue

Le puzzle EternityII, qui rapportera 2 millions de dollars à celui qui le résoudra, est un problème sur lequel de nombreuses personnes se sont penchées. Dans le cadre de ce projet, nous avons étudié le problème qu'il représente de façon à nous faire une idée de sa complexité et de la façon dont on pourrait aborder sa résolution le plus efficacement possible.
Éric BOURREAU, chercheur au LIRMM et encadrant de ce projet, avait déjà épluché un forum qui, déjà très utilisé pour le premier puzzle Eternity (et ayant contribué à le résoudre), avait repris une grande activité pour ce second volet.
Il nous a ainsi proposé d'étudier diverses pistes qui lui semblaient intéressantes.

2 Présentation du problème

EternityII est un puzzle composé de 16x16 pièces carrées. Ces pièces ont une couleur sur chaque côté, de façon que deux pièces ne peuvent être placées côte à côte que si leur côté commun a la même couleur.
Ce puzzle peut être dissocié en deux sous-problèmes, le cadre extérieur et le puzzle inérieur, puisque les pièces de la bordure sont clairement identifiées. En effet la bordure a une couleur qui lui est propre (grise). De plus les couleurs entre les pièces de bordure sont différentes de celles des pièces du puzzle central (ce qui n'a aucun intérêt pour nous, cela n'a d'autre fonction que celle d'aide visuelle).

Problème du puzzle EternityII simplifié en une grille de 4x4 pièces, disponible sur le site officiel

Les couleurs sont réparties de la façon suivante:
- une couleur pour la bordure (grise)
- 5 couleurs pour le cadre extérieur
- 17 couleurs pour le puzzle intérieur (ou pour les relier au cadre extérieur)

Le nombre de couleurs n'a pas été choisi de façon arbitraire. Il est celui qui maximise la difficulté du problème (d'après une étude menée quelques temps avant la sortie du jeu). En effet, en augmentant le nombre de couleurs, le nombre de solutions serait lui aussi augmenté, rendant le problème plus facile à résoudre, alors que le réduire augmenterait les contraintes de voisinage entre les pièces et permettrait de trouver beaucoup plus facilement une solution (ou être bloqué s'il n'y en a pas).

De plus les couleurs ont été réparties dans les mêmes proportions (par exemple dans le puzzle central 5 couleurs apparaissent 48 fois, et les 12 autres 50 fois). Une couleur n'apparaissant que peu de fois aurait offert un bon appui pour commencer à chercher des solutions.

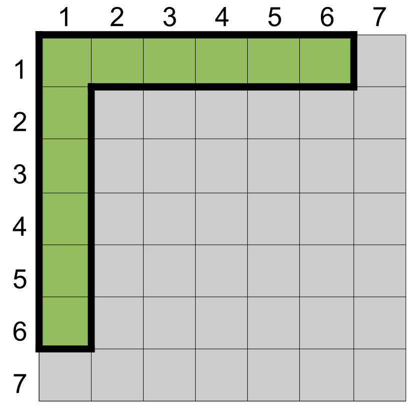
Pour résoudre le puzzle EternityII, nous allons dont tenter de le découper en sous-problèmes sur lesquels nous chercherons des astuces afin d'en réduire la difficulté.

3 Problème des équerres-triangles-carrés

3.1 Présentation du problème

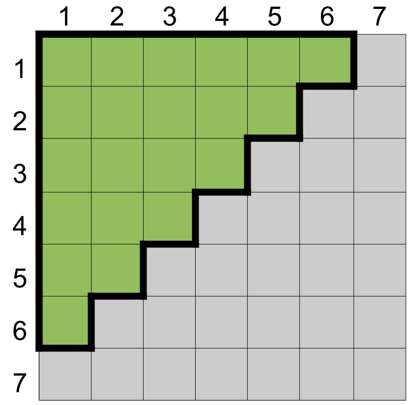
Nous allons tout d'abord définir les différentes figures géométriques que nous allons utiliser pour la suite, et qui sont constituées d'un assemblage de cases du panneau (grille du puzzle).
Ces formes sont l'équerre, le triangle, le carré et le triangle-équerre, que nous allons étudier successivement.

On appellera équerre de taille nxn l'ensemble des 2n-1 cases obtenues en partant d'un coin, puis en s'étendant de n-1 case sur la bordure :



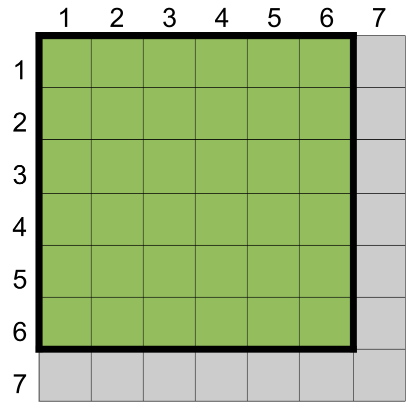
Equerre de taille 6x6

Un triangle de taille nxn est l'ensemble des n(n+1) pièces obtenues à partir de l'équerre de taille nxn, et en remplissant les cases intérieures de façon à former un triangle plein :



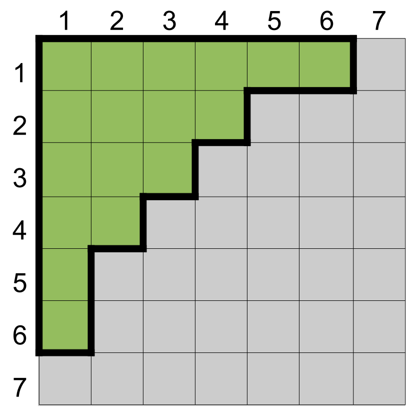
Triangle de taille 6x6

Le carré de taille nxn est comme son nom l'indique l'ensemble des n^2 cases formant un carré plein :



Carré de taille 6x6

Enfin, nous ajoutons à notre panoplie de figures le triangle-équerre de taille nxn, qui sera la superposition de l'équerre de taille nxn et du triangle de taille (n-1)x(n-1). On peut aussi dire qu'il s'obtient en prolongeant le triangle de taille (n-1)x(n-1) de 1 case sur chaque bordure. Il est donc constitué de n(n-1) +2 cases.



L'approche du problème par les équerres consiste à essayer de trouver de façon naïve toutes les solutions possibles pour les équerres partant des coins du panneau du puzzle. Celui-ci est constitué de 16x16 = 256 pièces, dont 4 pièces pour les coins, 56 pour la bordure, et les 196 restantes pour le puzzle intérieur.

Le puzzle complet constituant un problème inattaquable de façon naïve, nous allons donc commencer par observer l'évolution du nombre de solutions que l'on peut obtenir pour les figures géométriques vues précédemment.

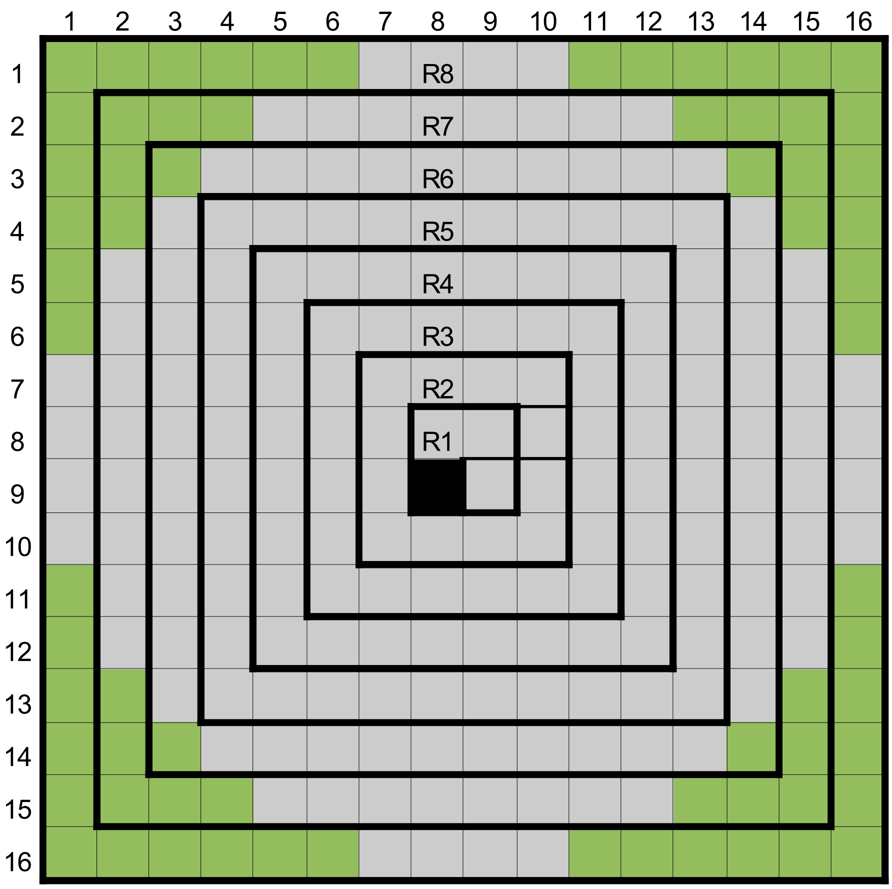
Nous allons pouvoir procéder par étapes, en effectuant d'abord des recherches d'équerres, puis en obtenant les triangles correspondant, et en continuant avec les carrés.

De plus, nous pouvons utiliser cette façon de procéder dans l'autre sens également, puisqu'une fois les triangles obtenus nous pouvons les ramener à des équerres, dont le nombre aura été amoindri par rapport au résultat initial. Nous pouvons faire de même avec les carrés, de façon à réduire le nombre de triangles et donc d'équerres.

Une fois ce travail effectué, nous pouvons calculer les équerres de taille supérieure qu'il est possible d'obtenir à partir de celles-ci. Cette façon de procéder peu sembler très peu efficace, puisqu'on sacrifie à chaque étape les carrés et triangles obtenus précédemment.
Ce choix se justifie de plusieurs façons:

- Le problème EternityII est inattaquable de façon naïve et il serait donc vain de tenter de résoudre un très gros carré de façon naïve
- Nous ignorons quelle taille de triangles nous pouvons obtenir facilement, même si nous espérons obtenir des triangles de taille 5x5, et de là des triangles-équerres de taille 6x6
- Les solutions trouvées sont très nombreuses, et stocker les carrés ou même les triangles à chaque étape prendrait une place tellement grande en mémoire que nos calculs devraient très vite être écourtés

Nous commencerons les calculs pour des équerres de taille 2x2, puis les étendront progressivement. Si nous parvenons à obtenir des triangles-équerres de taille 6x6, nous aurons alors les différentes combinaisons possibles pour les coins du puzzle, représentés de cette façon :



Il ne nous restera plus alors qu'à résoudre la partie intérieure (le "diamant intérieur") du puzzle, ainsi formée (dire qu'il ne restera "plus qu'à" est ironique, puisque le nombre de cases restantes reste important et qu'il nous faudra ruser pour espérer nous y attaquer).

3.2 Résultats Obtenus.

Les résultats que nous allons présenter ont été obtenus à partir de programmes que nous avons réalisé en Java, recherchant des solutions de façon naïve. Nous avons utilisé un algorithme de backtracking récursif qui compte le nombre d'équerres trouvées, et pouvant éventuellement sauvegarder les résultats. A cet algorithme principal se sont ajoutées des extensions permettant à partir des équerres de trouver les triangles et carrés de même taille et d'en extraire ensuite les équerres distinctes valides.

Voici le schéma de l'algorithme de backtracking principal :

```
/**
 *
 * @param originX coordonnée x de l'origine où naît la figure dans le panneau
 * @param originY coordonnée y de l'origine où naît la figure dans le panneau
 * @param i coordonnée x de la prochaine case à remplir
 * @param j coordonnée y de la prochaine case à remplir
 * @param piecesPlacees nombre de pièces déjà placées par l'algorithme
 * @param m taille de la figure
 * @param casesTotales nombre total des pièces qui forment la figure
 */
      public void solver_figure(int originX, int originY, int i, int j,int
                                 piecesPlacees,int m,int casesTotales)
      {
            if (piecesPlacees<casesTotales){
                  int s[] = caseSuivante(originX, originY, i, j,m);
                  ArrayList<Piece> pieces;

                  switch (placePiece(s[0],s[1])) {
                  case 2:
                        pieces = this.coins;
                        break;
                  case 1:
                        pieces = this.bords;
                        break;
                  default:
                        pieces = this.piecesTotales;
                        break;
                  }

                  for(int k=0;k<pieces.size();k++){

                        //Si on n'est pas dehors du tableau
                        if (s[0]!=-1){

                              while (placerPiece(pieces.get(k), s[0], s[1])){
                                    tableau[s[0]][s[1]]= pieces.get(k);
                                    //On place la pièce dans le panneau
                                    pieces.get(k).setUtilisee(true);
                                    //On met la pièce comme une pièce déjà
                                    utilisée
                                    piecesPlacees++;
                                    solver_carre_m_n(originX, originY, s[0],
                                    s[1], piecesPlacees,m,casesTotales);
                                    //On a placé une pièce et on va pour les
                                    suivantes
                                    piecesPlacees--;
```

```
                        tableau[s[0]][s[1]]=null;
                        //On enleve la pièce du panneau
                        pieces.get(k).setUtilisee(false);
                  //On met la pièce comme une pièce pas utilisée
                  }
                  resetPiece(pieces.get(k));//On initialise la pièce
            }
      }
if(!(originX==i && originY==j)){
            if(i>0 && j>0 && i<longueur-1 && j<largeur-1)
piecesTotales.get(piecesTotales.indexOf(tableau[i][j])).setUtilisee(false);

      else if((i>0 && i<(longueur -1) && j==0) || ( i==0 &&
            j>0 && j<(largeur - 1)) || (i==(longueur - 1) &&
            j>0 &&(j<largeur-1)) || (i>0 && i<(longueur - 1)
            && (j==largeur-1)))
      bords.get(bords.indexOf(tableau[i][j])).setUtilisee(false);

      else

      coins.get(coins.indexOf(tableau[i][j])).setUtilisee(false);
      tableau[i][j]=null;
      piecesPlacees--;
      }
}else
      {
            nbSolutions++;
            /*Ici, on peut enregistrer la solution si on veut*/
      }
}
```

Nous avons étudié séparément le cas où aucune pièce du puzzle n'est placée, et celui où la pièce centrale et les 4 pièces indices sont fixées, de façon à comparer les résultats obtenus. Les indices de ces pièces indices sur le panneau, à coordonnées comprises entre 1 et 16, sont (3,3), (3,14), (14,3) et (14,14). Ces pièces indices sont révélées par le concepteur du jeu (position et orientation sur le panneau) à raison de deux par an, et à la condition de résoudre pour chaque pièce indice un puzzle, basé sur le même principe, mais de taille réduite.

3.2.1 Quand aucune pièce n'est placée sur le panneau

Observons les résultats obtenus pour le cas dans lequel aucune pièce n'est fixée sur le panneau. Nous avons donc un panneau symétrique, dans le sens où on peut indifféremment chercher nos formes géométriques à partir de n'importe lequel des 4 coins.

Avant d'utiliser la méthode dont nous avons parlé plus tôt, et utilisant les carrés pour diminuer le nombre d'équerres, nous avons lancé l'algorithme naïf afin de pouvoir comparer les résultats.

Pour une taille 2x2:

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.312

Pour une taille de 2x2, équerres et triangles ont la même forme, ce qui explique que le même nombre soit trouvé pour chacun.

Pour une taille 3x3:

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
3x3	57.131	150.167	2.633.221

Pour une taille 4x4:

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
4x4	6.066.398	108.936.800	

L'augmentation du nombre de solutions trouvées est très violente à chaque étape. Pour une taille de 4x4, le nombre de carrés solutions n'a déjà pas pu être calculé en temps acceptable.

Pour une taille 5x5:

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
5x5	598.821.183		

Nous arrivons à présent à un stade où nous ne pouvons pas calculer le nombre de triangles solutions en temps acceptable.

Pour une taille 6x6:

Cette taille est trop grande même pour le calcul du nombre équerres solution. Nous avons toutefois pu estimer leur nombre aux alentours de 54 milliards.

Table récapitulative:

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.312
3x3	57.131	150.167	2.633.221
4x4	6.066.398	108.936.800	
5x5	598.821.183		
6x6	(aprox)54.000.000.000		

Utilisons à présent la méthode mentionnée plus haut:

Pour une taille 2x2:

- A partir des 1312 carrés obtenus, nous pouvons extraire 445 équerres distinctes. Cela signifie que 55 des 500 équerres obtenues au départ ne peuvent pas être solutions du puzzle final, puisqu'elles ne peuvent pas faire partie d'un carré. Nous n'aurons donc pas à en tenir compte pour la suite.
- Si nous prenons alors ces 445 équerres de taille 2x2 pour les étendre à la taille 3x3, nous obtenons un total de 50860 équerres possibles, soit un gain de 6271 équerres inutiles retirées. Nous n'avons donc plus que 50860/57131=89,02 % des équerres générées de façon naïve.
- Si nous étendons à présent ces équerres à des triangles de taille 3x3, nous retrouvons le nombre 150167, ce qui s'explique facilement par le fait qu'un triangle 3x3 est la superposition d'un carré 2x2 et d'une équerre 3x3.

Pour une taille 3x3:

- On répète ce processus pour les figures de taille 3x3. Nous extrayons à partir des 2633221 carrés de taille 3x3 trouvés un total de ***48622*** équerres distinctes, pour un gain de 57131 – 48622 = 8509 équerres inutiles en moins. Si on compare avec le deuxième résultat trouvé, ce qui peut être plus intéressant, le gain reste de 50860 – 48622 = 2238 équerres. On n'a ainsi plus que 85.1% des équerres obtenues naïvement, ou 95.6% des équerres obtenues en prolongeant les équerres de taille 2x2 valides.
- Si on étend ces 48622 équerres valides sur des triangles de taille 3x3, on en obtient un total de 147077 , soit un gain de 150167 – 147077 = 3090 triangles non valides en moins. On en a gardé 97.94%.
- Si à présent on étend ces équerres à une taille 4x4, on en obtient un total de ***5167194*** , pour un gain de 6066398 – 5167194 = 899204 équerres par rapport au nombre obtenu par l'algorithme naïf, soit 85.177%.
- On obtient à partir de là un total de ***108928394*** triangles de taille 4x4, ce qui par rapport au total de triangles généré avec l'algorithme naïf (108936800), ne fait qu'un écart de 8406 triangles inutilisables. Ce nombre si faible s'explique, comme pour les triangles 3x3, par le fait que le triangle de taille 4x4 est presque la superposition de l'équerre de taille 4x4 et du carré de taille 3x3 (à deux cases près).

Arrivés à ce stade, nous devons arrêter nos tests sans indices, puisque les valeurs ayant augmenté au-delà de nos capacités de calcul, nous ne pouvons plus faire de comparaisons sur les carrés et les triangles.
Nous allons donc à présent étudier le nombre de combinaisons pour les mêmes formes géométriques, mais en utilisant les indices obtenus, de façon à le réduire.

3.2.2 Avec les 5 indices placés sur le panneau

Tout comme pour la partie sans indice, nous avons tout d'abord lancé des essais avec un algorithme naïf. Nous l'avons répété sur chacun des 4 coins du panneau

Pour la taille 2x2:

	Taille	Équerres	Triangles	Carrés
Coin (1,1)	2x2	500	500	1.291
Coin (1,16)	2x2	500	500	1.291
Coin (16,1)	2x2	500	500	1.291
Coin (16,16)	2x2	500	500	1.291

Les résultats pour la taille 2x2 sont les mêmes pour les 4 coins, car ni les équerres, ni les triangles, ni les carrés de taille 2x2 ne couvrent d'indice, dont nous rappelons les coordonnées: (3,3), (3,14), (14,3) et (14,14).

Pour la taille 3x3:

	Taille	Équerres	Triangles	Carrés
Coin (1,1)	3x3	57.131	147.747	3.084
Coin (1,16)	3x3	57.131	147.747	3.400
Coin (16,1)	3x3	57.131	147.747	2.909
Coin (16,16)	3x3	57.131	147.747	2.897

Ici encore, les triangles ne sont pas influencés par les indices (les équerres ne le seront de toute façon jamais avec cet algorithme). Les carrés en revanche couvrent à présent un indice et varient légèrement de l'un à l'autre. Nous remarquons que nous obtenons pour chaque coin un nombre de carrés de l'ordre de 3000, alors que nous en obtenions plus de 2,6 millions sans.

Pour la taille 4x4:

	Taille	Équerres	Triangles	Carrés
Coin (1,1)	4x4	6.066.398	329.488	33.845.721
Coin (1,16)	4x4	6.066.398	359.075	34.363.811
Coin (16,1)	4x4	6.066.398	309.987	30.652.166
Coin (16,16)	4x4	6.066.398	308.600	32.538.628

Dès lors qu'on atteint une taille de 4x4, les indices influent sur les triangles en plus des carrés. Pourtant, dans ce cas précis, la pièce fixe n'appartient pas encore au triangle, mais y est adjacente et impose une contrainte de couleur sur deux faces. Cette contrainte agit très fortement sur le nombre de triangles valides, et donne un véritable coup de frein à son évolution. Nous avons ainsi moins de 400.000 triangles pour chaque coin au lieu de près de 109 millions sans indices.

Pour la taille5x5:

	Taille	Équerres	Triangles	Carrés
Coin (1,1)	5x5	598.821.183	198.514.865	
Coin (1,16)	5x5	598.821.183	217.822.208	
Coin (16,1)	5x5	598.821.183	193.134.705	
Coin (16,16)	5x5	598.821.183	195.465.267	

A cette étape nous ne pouvons plus calculer le nombre de carrés en temps raisonnable, et les triangles commencent à devenir très nombreux.

Pour la taille 6x6:

Le nombre d'équerres est trop important pour que nous le calculions en temps raisonnable, mais nous savons que le nombre d'équerres avec indices est le même que celui obtenu sans, que nous avons estimé aux alentours de 54 milliards.

Récapitulatif des valeurs trouvées, par coin:

- Coin (1,1)

ORIGIN(1,1)

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.291
3x3	57.131	147.747	3.084
4x4	6.066.398	329.488	33.845.721
5x5	598.821.183	198.514.865	

- Coin (1,16)

ORIGIN(1,16)

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.291
3x3	57.131	147.747	3.400
4x4	6.066.398	359.075	34.363.811
5x5	598.821.183	217.822.208	

- Coin (16,1)

ORIGIN(16,1)

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.291
3x3	57.131	147.747	2.909
4x4	6.066.398	309.987	30.652.166
5x5	598.821.183	193.134.705	

- Coin (16,16)

ORIGIN(16,16)

Taille	Équerres	Triangles	Carrés
2x2	500	500	1.291
3x3	57.131	147.747	2.897
4x4	6.066.398	308.600	32.538.628
5x5	598.821.183	195.465.267	

Nous avons pu observer que les valeurs obtenues sont très proches d'un coin à l'autre.

Pour la taille 2x2:

- Nous pouvons, à partir des 1291 carrés générés, extraire un total de 443 équerres distinctes. Cela invalide donc 57 équerres du résultat initial. Cela nous laisse deux équerres de moins qu'en utilisant cette méthode sans les indices, du fait qu'on a interdit les pièces déjà fixées pour former ces carrés.
- Nous pouvons alors étendre ces 443 équerres de taille 3x3 à ***50624*** équerres de taille 4x4, soit 6507 de moins qu'avec l'algorithme naïf, ce qui représente 88.61% d'équerres valides.
- De la même façon que nous l'avons vu sans les indices, étendre ces équerres à des triangles de taille 3x3 ne réduit pas le nombre de triangles valides, du fait que le carré de taille 2x2 est inclus dans ce triangle.

Pour la taille 3x3:

- On répète alors l'opération pour les figures de taille 3x3. A partir des 3084 carrés de taille 3x3 obtenus, nous pouvons extraire 2620 équerres distinctes. Nous avons donc retiré 57131 – 2620 = 54511 équerres de taille 3x3 non valide, ce qui nous laisse ainsi 4.59% d'équerres valides sur l'algorithme naïf (ou 5.175% sur l'étape précédente). Nous observons ici la force de la contrainte imposée par la pièce fixée.
- Nous pouvons à partir de ces équerres valides générer de nouveau les triangles de taille 3x3. On en obtient 9404, ce qui correspond à 6.5% des Triangles d'origine. Ce nombre est donné à titre purement indicatif, car nous savons qu'il pourrait encore être divisé au moins par 3. En effet, nous pourrions obtenir, en partant des carrés 3x3, un nombre de triangles valides inférieur ou égal à 3084.
- Nous pouvons ensuite étendre les 2620 équerres de taille 3x3 valides, de façon à obtenir ***280056*** équerres de taille 4x4 sur un total de 6066398, pour un gain de 5786342 équerres. Ici encore, nous ne gardons donc qu'un faible nombre d'équerres, 4.62% du total initial.
- En étendant ces équerres aux triangles de taille 4x4, nous en obtenons un total de 329488, qui correspond au nombre de triangles obtenus de façon naïve. Ce résultat était prévisible, car le triangle de taille 4x4, si on lui ajoute la pièce d'indice, contient alors le carré de taille 3x3.

Pour la taille 4x4:

- A partir des carrés de taille 4x4, nous avons pu extraire 240193 équerres de taille 4x4 distinctes. Nous éliminons donc 6066398 – 240193 = 5826205 équerres inutiles, pour ne garde que 3,96% de valides (ou 280056 – 240193 = 39863 équerres pour 85.77% de valides si on se base sur l'étape précédente).

- Nous pouvons à partir de ces équerres valides générer ***285790*** nouveaux triangles de taille 4x4, soit 86.74% du total de départ.
- Si maintenant on étend les 240193 équerres valides aux équerres de taille 5x5, on en obtient un nombre de 23684725, pour 598821183 – 23684725 = 575136458 équerres de gagnées sur la méthode naïve. Nous gardons ainsi 3.96% des équerres, ce qui reste dans l'ordre de grandeur de ce qu'on a pu obtenir jusqu'ici.
- Nous obtenons alors à partir de ces équerres le nombre de ***198 104 379*** triangles de taille 5x5, ce qui représente un faible gain (198514865 – 198104379 = 410486 triangles retirés, on en garde donc 99.8%).

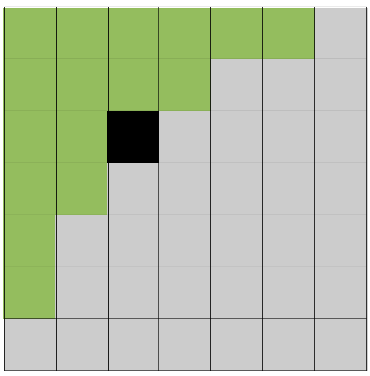
Pour la taille 5x5:

- Ne pouvant pas continuer sur les carrés de taille 5x5, nous continuons directement les calculs. Il ne sert à rien de chercher les équerres contenues dans les triangles de taille 5x5, car cela ne diminuerait pas le nombre précédemment obtenu, du fait que le triangle de taille 5x5 est contenu dans le carré de taille 4x4 (à l 'exception des deux pièces de bordures ajoutées aux équerres 5x5)
- Nous étendons donc les équerres de taille 5x5 pour obtenir au final ***2 162 636 113*** équerres valides de taille 6x6, ce qui représente à peu près 4% du nombre d'équerres estimées avec la méthode naïve (aux alentours de 54 milliards).

Tableau récapitulatif :

	Taille	Équerres étendues	Triangles étendus	Carrés	Éq. Valides	Tr. valides
	2x2	500	500	1.291	443	443
	3x3	50.624	147.747	3.084	2620	9604
ORIGIN(1,1)	4x4	280.056	329.488	33.845.721	240.193	285790
	5x5	23.684.725	198.104.379			
	6x6	2.162.636.113				

Nous pouvons ensuite obtenir des triangles-équerres de taille 6x6 par superposition des triangles de taille 5x5 et des équerres de taille 6x6. Le schéma ci-dessous représente la forme des triangles-équerres obtenus, avec la pièce indice fixée représentée sous la forme d'une case noire.



Nous obtenons au total 18.081.232.842 triangles-équerres distincts de taille 6x6 pour le coin étudié.

Analyse des résultats obtenus.

Au final nous avons pu constater que le problème des triangles-équerres de taille 6x6 était attaquable dans la mesure où nous disposons des pièces indices fixées. Nous avons ainsi obtenu 18.081.232.842 solutions pour un coin, c'est à dire de l'ordre de 10^{10} triangles-équerres. Il sera ensuite possible de stocker ces solutions dans une base de données, puis d'essayer de faire des regroupements de triangles-équerres en fonction de leur coins d'origine et de leur compatibilité (il s'agira de trouver quels triangles-équerres peuvent coexister, c'est à dire ne pas avoir de pièce commune). Nous ne disposons pas de bases de données assez importantes et il ne nous appartient donc pas de faire ces tests, mais si ils son concluants ils permettront de résoudre plus facilement le reste du puzzle EternityII. En effet, cela représenterait 17x4 + 1 = 69 pièces déjà placées (dont 44 pièces de bordure, 1 pièce centrale, 4 pièces indices et 20 pièces de puzzle restantes). Nous avons donc réussi par une recherche principalement naïve à aborder une partie du puzzle, laissant à résoudre le "diamant intérieur" du puzzle, évoqué plus haut.

4 Problème des corolles:

Le problème des corolles consiste à étudier comment le placement d'une pièce particulière peut influer sur ses voisinages successifs. Nous allons ainsi obtenir une zone autour de la pièce posée, donc les cases seront plus ou moins contraintes. Plus on s'éloignera et moins la contrainte sera forte. Nous appelons corolle l'ensemble de toutes les cases pour lesquelles la pose de la pièce a retiré au moins une possibilité (contrainte non nulle).

Pour notre étude nous devrons choisir une sélection de pièces représentatives, et observer comment elles se comportent en fonction de leurs orientations respectives, dans des zones représentatives. Pour créer cette sélection de pièces, nous nous en prendrons un échantillon dans lequel toutes les couleurs soient représentées. Pour les zones représentatives, nous devrons étudier :

- contre le coin, contre la bordure, proche de la bordure et à l'intérieur du puzzle 14x14 pour les pièces intérieures
- contre le coin, proche du coin et en milieu de la bordure, pour les pièces du bord
- dans le coin pour les pièces de coins

Nous observerons l'environnement de chaque pièce choisie pour ses quatre orientations possibles (rotations) que nous numéroterons 1, 2, 3 et 4.

Il sera intéressant de stocker pour toutes les cases des environs toutes les pièces candidates à s'y positionner ().
Cela peut donner par exemple graphiquement :

Orientation 1,2,3 ou 4

4	43	4	46
53	39	PXX	39
56	195	39	195

Les cases colorées en jaune sont les cases de la corolle, pour lesquelles le nombre de pièces candidates diffère du nombre de pièces totales.

Après avoir trouvé les corolles pour la sélection de pièces choisies, pour chaque orientation et chaque position représentative dans le cadre, nous pourrons étudier les corolles stockées de façon à analyser leur comportement suite à l'élimination d'un certain nombre de pièces au hasard. Le fait d'interdire des pièces dans la corolle va permettre de réduire le nombre de pièces possibles sur chaque case, ainsi d'augmenter les contraintes imposées par la corolle sur son environnement, et donc permettre de l'étendre à des cases supplémentaires.
Le but est d'associer la méthode des corolles à la méthode des équerres. Ainsi, en retirant les pièces contenues dans les équerres des possibilités de la corolle, nous pourrons l'étendre de façon à espérer résoudre plus facilement le diamant intérieur.

4.1 *Méthode de croissance de la corolle*

Pour faire grandir la corolle, nous allons employer deux méthodes de croissance différente, en fonction des cas.

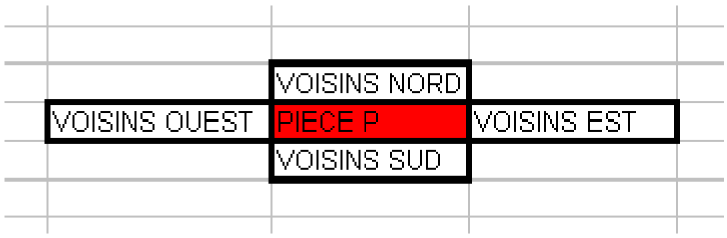
La première méthode est la croissance en carré : le but est de créer un carré de cases autour de la pièce cible et dans chacune desquelles on note le nombre de pièces possibles. Pour cela on commence par étudier ses voisins Nord, Sud, Est et Ouest puis on essaye de faire du "matching" (faire correspondre les pièces des coins avec leurs deux pièces voisines) avec toutes les pièces dans la position appropriée. On essaye avec toutes pièces possible des deux cases voisines correspondantes.

Le deuxième type de croissance consiste, quand une case se trouve à l'intérieur d'une ligne de la corolle (elle des voisins de part et d'autre qui y appartiennent déjà) à ne l'étendre que dans une seule direction, vers l'extérieur de la corolle.

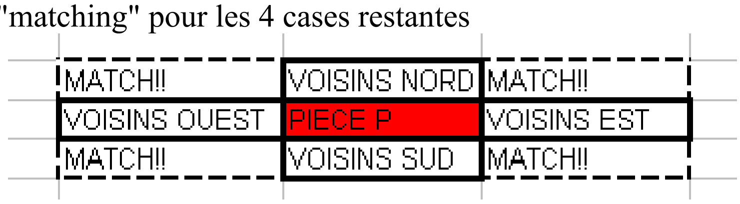
Voici une illustration de ces méthodes (les pièces en rouges sont les pièces qu'on étudie, celles en jaune sont les autres pièces de la corolle) :

On commence avec une seule pièce

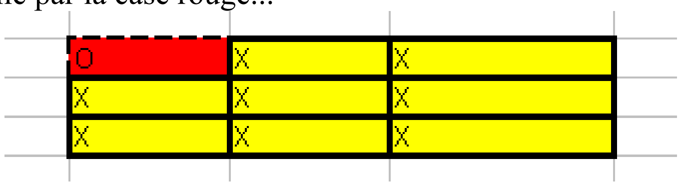
On applique la croissance en carré, en commençant par les 4 voisins directs...



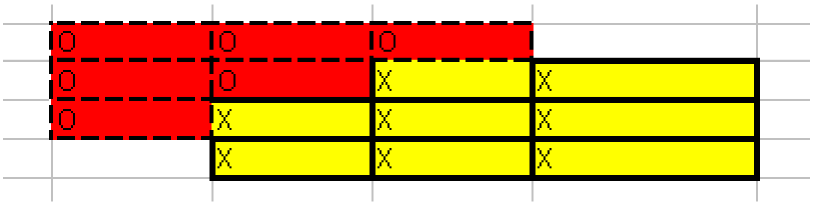
... puis en faisant du "matching" pour les 4 cases restantes



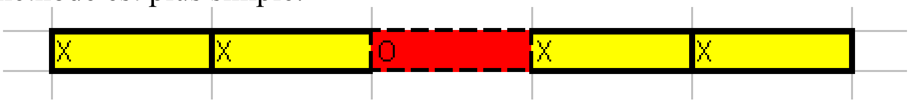
En développant la corolle par la case rouge...

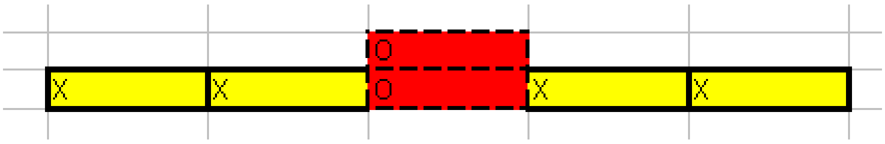


... le résultat serait :



La deuxième méthode est plus simple:





Pour chaque position, cette méthode toujours essayera de faire matching en utilisant l'ensemble complet des pièces, sauf celle qui est au centre. Pour cette raison, la corolle sera fermé avant que si on n'avait pas permis l'utilisation de toutes les pièces pour chaque position, puisque on a plus de pièces pour faire le matching. C'est pour ça que la méthode est considérée pessimiste, car la corolle générée est, en général, plus petite que la corolle réel. Pourtant, on a choisi l'utiliser parce que le résultat nous donne une idée assez approximative de la tendance de la croissance et il est sensiblement plus rapide de calculer que les corolles réelles Ça nous a permis la réalisation de plus d'essais et de tester quelques scénarios qu'on pense qu'ils sont intéressants

4.2 Évaluation des résultats:

Maintenant, on va comparer les résultats obtenus avec le modèle des corolles et celui qui calculait seulement le carré autour de la pièce cible.

Notre analyse se fera en observant le comportement des six pièces de numéros : 61, 72, 98, 112, 190 et 149, choisies arbitrairement parmi les combinaisons de pièces qui couvraient tous les couleurs différentes.

Les principales différences entre les résultats sont causées par les différents systèmes de résolution: Les figures à gauche ont été résolues avec une méthode réaliste, en résolvant le carré 3 x 3 qui est autour de la pièce originale. Les figures à droite ont été calculées avec la méthode des corolles croissantes.

Nous allons étudier leur comportement en différents endroits : dans un coin du cadre intérieur, contre une bordure et au centre de la grille, avec toutes les possibles orientations des pièces. Dans l'annexe on peut trouver tous les résultats.

On commence par un coin. On montre seulement les calculs pour un coin, puisque les autres sont équivalents:

Orientation 1

1	2	19
2	**P61**	36
21	33	195

Orientation 2

2	2	20
2	**P61**	31
17	32	189

Orientation 3

4	3	18
3	**P61**	34
16	33	195

Orientation 4

*	*	*
*	**P61**	*
*	*	*

Orientation 1

1	3	20	56
4	P61	39	195
43	39	195	195
56	195	195	

Orientation 2

4	4	28	56
3	P61	39	195
16	40	195	195
56	195	195	

Orientation 3

4	4	28	56
3	P61	39	195
16	40	195	195
56	195	195	

Orientation 4

*	*	*	
*	P61	*	
*	*	*	

Comme on peut voir, les corolles générés sont très semblables. Avec l'orientation 2 elle est notablement plus petite. Le nombre de pièces qui font du matching dans chaque position est égal ou plus grand que dans le carré 3x3, mais jamais plus petit (il y a plus de pièces à placer).

Orientation 1

21	3	20
23	**P61**	36
191	39	195

Orientation 2

40	4	32
35	**P61**	40
195	39	195

Orientation 3

33	4	26
38	**P61**	39
194	40	195

Orientation 4

16	3	30
33	**P61**	33
195	39	194

Orientation 1

56	21	3	20	56
195	39	P61	39	195
195	195	39	195	195
		195		

Orientation 2

56	43	4	34	56
195	39	P61	40	195
195	195	39	195	195
		195		

Orientation 3

56	36	4	28	56
56	39	P61	39	195
195	195	40	195	195
		195		

Orientation 4

56	16	3	31	56
195	40	P61	39	195
195	195	39	195	195
		195		

Aussi comme dans le cas précédent , si on place les pièces à côte de la bordure las corolles sont plus petites si on utilise la méthode pessimiste

Orientation 1

195	40	195
39	**P61**	39
194	39	195

Orientation 2

194	39	195
39	**P61**	40
195	39	195

Orientation 3

195	39	194
39	**P61**	39
195	40	195

Orientation 4

195	39	195
40	**P61**	39
195	39	194

		195		
	195	40	195	
195	39	P61	39	195
	195	39	195	
		195		

Orientation 2

		195		
	195	39	195	
195	39	P61	40	195
	195	39	195	
		195		

Orientation 3

		195		
	195	39	195	
195	39	P61	39	195
	195	40	195	
		195		

Orientation 4

		195		
	195	39	195	
195	40	P61	39	195
	195	39	195	
		195		

Avec la pièce placée au centre du grille on obtient les mêmes conclusions. Dans ce cas, l'observation d'une seule orientation est suffisante, puisque le développement de la corolle n'est pas conditionné par une bordure, et alors il est symétrique.

4.3 *Élimination de pièces*

4.3.1 Un triangle-équerre

Le suivant pas de notre analyse a été la simulation du comportement des corolles dans un scénario où il y avait déjà placée une équerre 6x6-triangle5x5 (aussi étudiées dans notre travail). On a choisi la taille parce que elle était la maximale qu'on a pu calculer avec nos ordinateurs. Pour faire la simulation, on élimine aléatoirement onze pièces des bordures et six pièces intérieures.

Orientation 1			
*	*	*	
*	P98	*	
*	*	*	
Orientation 2			
*	*	*	
*	P98	*	
*	*	*	
Orientation 3			
3	2	15	45
4	P98	42	189
22	42	189	189
45	189	189	
Orientation 4			
1	4	20	45
1	P98	41	189
10	36	189	189
44	189	189	
45	189		

Dans cet exemple on observe plusieurs facteurs intéressants Au premier lieu, il y a deux cases dans lesquels la corolle n'a pas de solution, et c'est une donnée énormément importante, car on peut éliminer candidats puisque il n'y a aucune combinaison de pièces qui permet résoudre la corolle. En plus, on peut voir que le plus restrictives qui sont les conditionnes, plus grande este est la corolle. C'est le cas du dernier exemple, où une seule pièce dans le coin peut faire du matching.

Orientation 1

45	20	2	16	45
189	40	P112	42	189
189	189	37	189	189
		189		

Orientation 2

45	7	1	8	45
189	41	P112	36	189
189	189	42	188	189
		189	189	189

Orientation 3

45	15	4	28	45
189	41	P112	40	189
189	189	42	189	189
		189		

Orientation 4

45	21	3	16	45
189	41	P112	36	189
189	189	41	189	189
		189		

Dans une bordure les conditions son moins restrictives et l'expansion de la corolle est remarquablement plus petite.

189	189	189	189	189
189	185	42	173	189
189	43	P98	37	189
189	176	38	189	
189	189	189		

On a la même situation au centre, où las conditions ne sont pas assez restrictives pour étendre la corolle.

4.3.2 Quatre triangles-équerres

Finalement, on a répété tous les calculs dans un scénario où il y a quatre triangles-équerres comme avant. Alors, on a éliminé les quatre coins, quarante et vingt-quatre pièces intérieures Le but est vérifier si les corolles arrivent à s'étendre assez pour occuper une surface remarquable et elles pourraient connecter avec les équerres. De toute façon, puisque la méthode est pessimiste, les résultats réels seront plus positifs pour notre but (mais impossibles de calculer avec nos moyens.

On ne peut pas réaliser l'analyse sur les coins puisque ils sont déjà occupés par les équerres.

Dans les bordures, les résultats sont les suivants:

		Orientation 1				
	*	*	*			
	*	P190	*			
	*	*	*			
		Orientation 2				
	16	13	5	1	3	16
	171	171	39	P190	37	171
		171	170	39	170	171
		171	171	171	171	171
		Orientation 3				
	*	*	*			
	*	P190	*			
	*	*	*			
		Orientation 4				
	16	15	4	1	4	16
	171	171	41	P190	38	171
		171	164	37	171	171
		171	171	171		

On observe qu'il y a quelques cas où la corolle n'a pas solution. Dans les autres, la corolle est plus étendu que dans les épreuves antérieurs Ça c'est parce qu'il y a moins pièces avec lesquelles faire le matching et la corolle ne peut pas se fermer aussi tôt. D'ailleurs, la pièce 190 a deux couleurs égales, et alors les possibilités du matching avec le pièces de la bordure sont plus petites. Il peut être un facteur à considérer dans le développement du problème.

		171	171	171	171
	171	163	33	161	171
171	165	38	P249	36	171
	171	168	33	169	171
	171	171	168	171	171
		171	171	171	

Quand on place la pièce au milieu du tableau on peut voir que la corolle est plus étendue.

4.4 Carrés réales 4X4

Pour finir l'étude des corolles, on a calculé des quelques carrés 4x4 pour pouvoir faire des comparaisons. En fait, on n'a pu calculer que quelques carrés sur les coins où il y a avait une pièce au maximum pour faire le matching. Dans l'autre cas, les calculs prenaient trop de temps.

Orientation 4

1	2	20	55
1	**P72**	40	190
12	30	189	195
55	194	195	195

Orientation 1

1	1	11	54
1	**P112**	20	191
11	20	187	195
54	193	195	195

Orientation 2

*	*	*
*	**P112**	*
*	*	*

Bien sur, le meilleur (en parlant d'efficience et d'élimination de candidats)cas est ce où il n'y a pas de pièces pour faire le matching dans le coin.

4.5 Conclusion

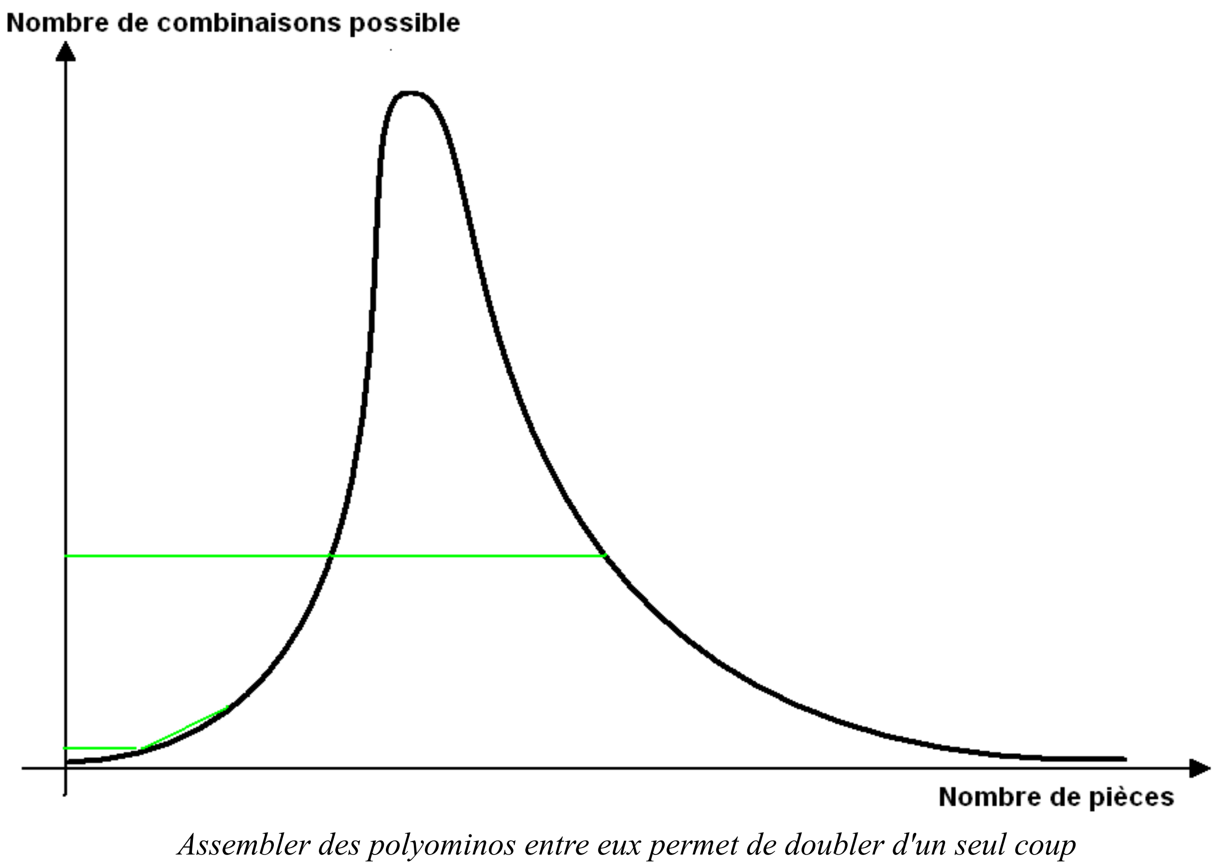
Les résultats obtenus nous disent qu'avec moins de pièces, la corolle s'étendre plus. Il est possible aussi qu'elle n'aie pas de solution, et c'est très positif pour notre but parce qu'on élimine beaucoup de candidats. De toute façon, les résultats sont seulement indicatifs et ils ne peuvent être pris rigoureusement à cause de plusieurs raisons: au premier lieu, la méthode est pessimiste et elle essaiera de fermer la corolle plus tôt qu'un algorithme plus fidèle à la réalité. Par une autre côté, le processus d'élimination de pièces est aléatoire, et il peut y avoir des situations qui peuvent semble remarquable mais être un cas isolé et conditionné par le hasard du calcul.

On pense qu'avec la solution des triangles-équerres-carrés on trouvera des couleurs qui ne pourront pas faire du matching prêt de ces limites, et alors on pourra éliminer quelques candidats et planifier la solution depuis l'extérieur vers l'intérieur.

5 Problème des polyominos

Nous avons étudié d'autres façons de nous attaquer au Diamant intérieur.

Une méthode visant à simplifier la résolution du problème est de chercher toutes les combinaisons de pièces formant une structure donnée. Par exemple, nous pourrions stocker toutes les combinaisons de deux pièces formant un domino. Par la suite, nous pourrions alors travailler directement avec ces dominos pour, en les combinant ensemble, former des carrés, lignes, ou toute forme constituée de 4 pièces, que l'on appellera polyomino de taille 4.
En utilisant cette méthode, nous pourrions former par exemple tous les carrés de taille 2x2 sans passer par les équerres de taille 2x2, ou bien les lignes de taille 4 calculer les ligne de taille 3.
Cette méthode peut se révéler très intéressante pour des pièces de grosse taille. En effet, nous savons qu'en augmentant le nombre de pièces pour former des structures, le nombre de solutions croit très rapidement. Cependant, quand les structures atteignent une certaine taille, le nombre de possibilités décroît, pour arriver à la solution finale du puzzle (ou aux 20.000 solutions possibles?) pour un polyomino carré de 14x14 pièces (on considère que la bordure sera peu limitante à ce stade, de par son grand nombre de possibilités. Sa contrainte se limitera à peu près à imposer les proportions de chaque couleur sur les faces externes du polyomino)



Assembler des polyominos entre eux permet de doubler d'un seul coup la taille de la structure étudiée

Nous avons effectué des tests pour des polyominos carrés ainsi que pour des lignes de longueurs diverses, mais nous arrivons à la conclusion que le nombre de polyominos trouvés quelqu'en soit la forme dépasse ce que nous pouvons stocker et que les énumérer prend un temps trop long déjà avec très peu de pièces.
Nous avons par exemple dû arrêter le calcul des lignes de longueur 5 après plusieurs heures et plus de 50Go de solutions stockées, et il en est de même avec des carrés de taille 3x3.

6 Conclusion

Après tous les tests effectués il apparaît que nous sommes limités par la puissance et la capacité de nos machines, ainsi que par le temps que nous avons eu à notre disposition. Le puzzle eternity présente un problème très complexe à résoudre, et les divers calculs que nous avons lancé ont pris pour la plupart plusieurs de nombreuses heures, pour certains des journées entières (nous avons souvent été déçus de ne pas pouvoir arriver à la fin de calculs dont nous avions mal estimé la complexité).

Nous avons au final exploré des pistes, qui , si elles se sont montrées intéressantes et ont amélioré notre perception du problème, se sont finalement heurtées aux limites de nos machines. Toutefois l'étude des équerres a permis d'identifier un peu plus de 18 milliards de solutions aux triangles-équerres de taille 6x6 pour un coin du puzzle, qui pourront être stockées et étudiées sur des machines plus puissantes que les nôtres (notamment en étudiant les équerres pouvant co-exister sur les 4 coins du puzzle), et peut-être alors parvenir à de meilleurs résultats grâce, notamment, à l'étude des corolles.

7 ANNEXE

Ici, on peut trouver toutes les données obtenues.

7.1 *Comparaison équerres 3x3 réelles - corolles*

7.1.1 Pièce 61

Orientation 1

1	2	19
2	**P61**	36
21	33	195

Orientation 2

2	2	20
2	**P61**	31
17	32	189

Orientation 3

4	3	18
3	**P61**	34
16	33	195

Orientation 4

*	*	*
*	**P61**	*
*	*	*

Orientation 1

1	3	20	56
4	P61	39	195
43	39	195	195
56	195	195	

Orientation 2

4	4	28	56
3	P61	39	195
16	40	195	195
56	195	195	

Orientation 3

4	4	28	56
3	P61	39	195
16	40	195	195
56	195	195	

Orientation 4

*	*	*
*	P61	*
*	*	*

Orientation 1

	21	3	20
	23	**P61**	36
	191	39	195

Orientation 2

	40	4	32
	35	**P61**	40
	195	39	195

Orientation 3

	33	4	26
	38	**P61**	39
	194	40	195

Orientation 4

	16	3	30
	33	**P61**	33
	195	39	194

Orientation 1

56	21	3	20	56
195	39	P61	39	195
195	195	39	195	195
		195		

Orientation 2

56	43	4	34	56
195	39	P61	40	195
195	195	39	195	195
		195		

Orientation 3

56	36	4	28	56
56	39	P61	39	195
195	195	40	195	195
		195		

Orientation 4

56	16	3	31	56
195	40	P61	39	195
195	195	39	195	195
		195		

Orientation 1

195	40	195
39	**P61**	39
194	39	195

Orientation 2

194	39	195
39	**P61**	40
195	39	195

Orientation 3

195	39	194
39	**P61**	39
195	40	195

Orientation 4

195	39	195
40	**P61**	39
195	39	194

		195		
	195	40	195	
195	39	P61	39	195
	195	39	195	
		195		

Orientation 2

		195		
	195	39	195	
195	39	P61	40	195
	195	39	195	
		195		

Orientation 3

		195		
	195	39	195	
195	39	P61	39	195
	195	40	195	
		195		

Orientation 4

		195		
	195	39	195	
195	40	P61	39	195
	195	39	195	
		195		

7.1.2 Pièce 72

Orientation 1

*	*	*
*	**P72**	*
*	*	*

Orientation 2

*	*	*
*	**P72**	*
*	*	*

Orientation 3

4	3	19
3	**P72**	35
20	31	195

Orientation 4

1	2	20
1	**P72**	40
12	30	189

Orientation 1

*	*	*	
*	P72	*	
*	*	*	

Orientation 2

*	*	*	
*	P72	*	
*	*	*	

Orientation 3

4	4	30	56
3	P72	42	195
21	43	195	195
56	195	195	

Orientation 4

1	3	31	56
1	P72	39	195
12	42	195	195
56	195	195	

Orientation 1			
	12	1	4
	30	**P72**	11
	195	39	189
Orientation 2			
	23	2	23
	27	**P72**	35
	195	39	195
Orientation 3			
	33	4	30
	38	**P72**	42
	194	43	195
Orientation 4			
	21	3	30
	31	**P72**	33
	195	39	189

Orientation 1					
	56	12	1	4	56
	195	42	P72	39	195
	195	195	39	195	195
			195		
Orientation 2					
	56	23	2	23	56
	195	39	P72	43	195
	195	195	39	195	195
			195		
Orientation 3					
	56	36	4	30	56
	195	39	P72	42	195
	195	195	43	195	195
			195		
Orientation 4					
	56	21	3	31	56
	195	43	P72	39	195
	195	195	42	195	195
			195		

Orientation 1			
	195	43	195
	42	**P72**	39
	195	39	195

Orientation 1					
			195		
		195	43	195	
	195	42	P72	39	195
		195	39	195	
			195		

7.1.3 Pièce 98

Orientation 1		
1	1	11
1	**P98**	16
11	23	187
Orientation 2		
*	*	*
*	**P98**	*
*	*	*
Orientation 3		
3	2	20
3	**P98**	33
19	35	195
Orientation 4		
2	2	19
2	**P98**	35
19	28	195

Orientation 1			
1	3	28	56
2	P98	40	195
22	39	195	195
56	195	195	
Orientation 2			
*	*	*	
*	P98	*	
*	*	*	
Orientation 3			
3	4	32	56
6	P98	43	195
36	43	195	195
56	195	195	
Orientation 4			
2	6	41	56
3	P98	39	195
33	43	195	195
56	195	195	

Orientation 1			
	31	3	28
	38	**P98**	25
	195	39	195
Orientation 2			
	22	2	22
	28	**P98**	42
	195	40	195
Orientation 3			
	37	4	30
	39	**P98**	43
	195	43	195
Orientation 4			
	36	6	40
	43	**P98**	39
	195	43	195

Orientation 1					
	56	33	3	28	56
	195	43	P98	40	195
	195	195	39	195	195
			195		
Orientation 2					
	56	22	2	22	56
	195	39	P98	43	195
	195	195	40	195	195
			195		
Orientation 3					
	56	40	4	32	56
	195	40	P98	43	195
	195	195	43	195	195
			195		
Orientation 4					
	56	36	6	41	56
	195	43	P98	39	195
	195	195	43	195	195
			195		

Orientation 1			
	195	43	195
	43	**P98**	40
	195	39	195

Orientation 1					
			195		
		195	43	195	
	195	43	P98	40	195
		195	39	195	

7.1.4 Pièce 112

Orientation 1

1	1	11
1	**P112**	20
11	20	187

Orientation 2

*	*	*
*	**P112**	*
*	*	*

Orientation 3

2	3	32
3	**P112**	41
26	36	195

Orientation 4

2	2	11
2	**P112**	19
20	29	194

Orientation 1

1	3	31	56
1	P112	42	195
11	37	195	195
56	195	195	

Orietnation 2

*	*	*
*	P112	*
*	*	*

Orientation 3

2	5	45	56
3	P112	41	195
26	43	195	195
56	195	195	

Orientation 4

2	3	22	56
3	P112	37	195
33	41	195	195
56	195	195	

Orientation 1			
	31	3	29
	35	**P112**	29
	195	37	195
Orientation 2			
	11	1	11
	20	**P112**	19
	192	39	193
Orientation 3			
	31	5	44
	41	**P112**	41
	195	43	195
Orientation 4			
	26	3	22
	36	**P112**	25
	195	41	195

Orientation 1					
	56	36	3	31	56
	195	41	P112	42	195
	195	195	37	195	195
			195		
Orietnation 2					
	56	11	1	11	56
	195	37	P112	43	195
	195	195	42	195	195
			195		
Orientation 3					
	56	32	5	45	56
	195	42	P112	41	195
	195	195	43	195	195
			195		
Orientation 4					
	56	23	3	22	56
	195	43	P112	37	195
	195	195	41	195	195
			195		

Orientation 1			
	195	43	195
	41	**P112**	42
	195	37	195

Orientation 1					
			195		
		195	43	195	
	195	41	P112	42	195
		195	37	195	
			195		

7.1.5 Pièce 190

Orientation 1

1	1	9
1	**P190**	27
11	23	195

Orientation 2

*	*	*
*	**P190**	*
*	*	*

Orientation 3

*	*	*
*	**P190**	*
*	*	*

Orientation 4

1	1	11
1	**P190**	20
12	22	187

Orientation 1

1	4	30	56
4	P190	42	195
35	43	195	195
56	195	195	

Orientation 2

*	*	*	
*	P190	*	
*	*	*	

Orientation 3

*	*	*	
*	P190	*	
*	*	*	

Orientation 4

1	3	22	56
4	P190	43	195
30	44	195	195
56	195	195	

Orientation 1			
	29	4	30
	39	**P190**	42
	195	43	195
Orientation 2			
	34	4	41
	43	**P190**	43
	195	42	192
Orientation 3			
	12	1	8
	22	**P190**	11
	190	43	171
Orientation 4			
	25	3	22
	37	**P190**	31
	194	44	195

Orientation 1					
	56	30	4	30	56
	195	44	P190	42	195
	195	195	43	195	195
			195		
Orientation 2					
	56	35	4	42	56
	195	43	P190	43	195
	195	195	42	192	195
			195	195	195
Orientation 3					
	56	12	1	8	56
	195	42	P190	44	195
	195	192	43	195	195
	195	195	195		
Orientation 4					
	56	25	3	22	56
	195	43	P190	43	195
	195	195	44	195	195
			195		

Orientation 1			
	194	43	192
	44	**P190**	42
	195	43	195

Orientation 1					
			195	195	195
		195	43	192	195
	195	44	P190	42	195
		195	43	195	195
			195		

7.1.6 Pièce 249

Orientation 1

*	*	*
*	**P249**	*
*	*	*

Orientation 2

2	1	11
4	**P249**	21
28	39	184

Orientation 3

1	1	11
1	**P249**	21
9	40	186

Orientation 4

1	1	10
1	**P249**	18
10	28	187

Orientation 1

*	*	*	
*	P249	*	
*	*	*	

Orientation 2

2	2	11	56
6	P249	41	195
29	41	195	195
56	195	195	

Orientation 3

1	6	44	56
3	P249	44	195
31	41	195	195
56	195	195	

Orientation 4

1	3	29	56
4	P249	38	195
33	44	195	195
56	195	195	

Orientation 1			
	32	4	30
	40	**P249**	40
	195	38	192
Orientation 2			
	22	2	11
	23	**P249**	21
	187	39	184
Orientation 3			
	29	6	43
	39	**P249**	39
	195	41	195
Orientation 4			
	31	3	29
	38	**P249**	37
	195	44	195

Orientation 1					
	56	33	4	30	56
	195	44	P249	41	195
	195	195	38	195	195
			195		
Orientation 2					
	56	22	2	11	56
	195	38	P249	41	195
	195	195	41	195	195
			195		
Orientation 3					
	56	29	6	44	56
	195	41	P249	44	195
	195	195	41	195	195
			195		
Orientation 4					
	56	31	3	26	56
	195	41	P249	38	195
	195	195	44	195	195
			195		

Orientation 1			
	195	41	195
	44	**P249**	41
	195	38	192

Orientation 1					
			195		
		195	41	195	
	195	44	P249	41	195
		195	38	195	
			195		

7.2 Avec un triangle-équerre

7.2.1 Pièce 61

Orientation 1

1	1	7	45
4	P61	37	189
32	39	189	189
45	189	189	

Orientation 1

45	8	2	16	45
189	38	P61	37	189
189	189	38	187	189
	189	189	189	189

Orientation 2

2	4	24	45
4	P61	37	189
26	39	189	189
45	189	189	

Orientation 2

45	23	3	24	45
189	37	P61	39	189
189	188	39	189	189
189	189	189	189	

Orientation 3

4	3	15	45
3	P61	38	189
10	38	189	189
44	189	189	
45	189		

Orientation 3

45	22	4	32	45
189	38	P61	37	189
189	189	38	185	189
	189	189	189	189

Orientation 4

*	*	*	
*	P61	*	
*	*	*	

Orientation 4

45	23	3	23	45
189	39	P61	37	189
189	189	39	189	189
		189		

	189	189	189		
189	189	188	189		
189	187	38	189	189	
189	38	P61	37	146	189
	189	36	169	189	
		189	189	189	

7.2.2 Pièce 72

Orientation 1

*	*	*	
*	P72	*	
*	*	*	

Orientation 1

	45	9	1	4	45
	189	41	P72	39	189
	189	184	36	189	189
	189	189	189	189	

Orientation 2

*	*	*	
*	P72	*	
*	*	*	

Orientation 2

	45	19	2	19	45
	189	42	P72	38	189
	189	189	39	189	189
			189		

Orientation 3

2	2	8	45
3	P72	38	189
14	42	189	189
45	189	189	

Orientation 3

	45	30	4	30	45
	189	41	P72	41	189
		189	39	189	
			189		

Orientation 4

*	*	*	
*	P72	*	
*	*	*	

Orientation 4

	45	10	2	17	45
	189	43	P72	36	189
	189	189	40	178	189
		189	189	189	189

			189	189	189
189	189	189	43	172	189
189	182	41	P72	36	189
189	189	186	38	189	
	189	189	189		

7.2.3 Pièce 98

Orientation 1

*	*	*	
*	P98	*	
*	*	*	

Orientation 1

45	19	3	18	45
189	40	P98	40	189
189	171	31	189	189
189	189	189		

Orientation 2

*	*	*	
*	P98	*	
*	*	*	

Orientation 2

45	17	2	19	45
189	39	P98	43	189
189	189	38	189	189
		189		

Orientation 3

3	2	15	45
4	P98	42	189
22	42	189	189
45	189	189	

Orientation 3

45	21	3	16	45
189	37	P98	42	189
189	189	43	189	189
		189		

Orientation 4

1	4	20	45
1	P98	41	189
10	36	189	189
44	189	189	
45	189		

Orientation 4

45	23	5	20	45
189	36	P98	42	189
189	189	43	189	189
		189		

189	189	189	189	189
189	185	42	173	189
189	43	P98	37	189
189	176	38	189	
189	189	189		

7.2.4 Pièce 112

Orientation 1

1	1	9	45
1	P112	41	189
10	36	189	189
44	189	189	
45	189		

Orientation 1

45	20	2	16	45
189	40	P112	42	189
189	189	37	189	189
		189		

Orientation 2

*	*	*
*	P112	*
*	*	*

Orientation 2

45	7	1	8	45
189	41	P112	36	189
189	189	42	188	189
		189	189	189

Orientation 3

2	4	35	45
2	P112	41	189
13	43	189	189
45	189	189	

Orientation 3

45	15	4	28	45
189	41	P112	40	189
189	189	42	189	189
		189		

Orientation 4

1	3	15	45
2	P112	35	189
14	40	189	189
45	189	189	

Orientation 4

45	21	3	16	45
189	41	P112	36	189
189	189	41	189	189
		189		

			189		
189	189	189	40	189	
189	182	39	P112	42	189
189	189	188	34	189	
		189	189	189	

7.2.5 Pièce 190

Orientation 1

1	40	20	45
3	P190	40	189
18	42	189	189
45	189	189	

Orientation 2

*	*	*	
*	P190	*	
*	*	*	

Orientation 3

*	*	*	
*	P190	*	
*	*	*	

Orientation 4

1	3	18	45
3	P190	43	189
19	43	189	189
45	189	189	

Orientation 1

45	21	4	21	45
189	43	P190	39	189
189	189	42	189	189
		189		

Orientation 2

45	29	4	29	45
189	42	P190	41	189
189	189	41	189	189
		189		

Orientation 3

45	10	1	6	45
189	41	P190	42	189
189	171	43	188	189
189	189	187	189	189
		189		

Orientation 4

45	19	3	16	45
189	43	P190	42	189
189	189	42	179	189
		189	189	189

	189	189	189	189	189
189	189	188	43	178	189
189	188	42	P190	39	189
189	189	151	40	189	
	189	189	189		

7.2.6 Pièce 249

Orientation 1

*	*	*
*	P249	*
*	*	*

Orientation 2

*	*	*
*	P249	*
*	*	*

Orientation 3

*	*	*
*	P249	*
*	*	*

Orientation 4

1	3	22	45
4	P249	37	189
24	43	189	189
44	189	189	
45	189		

Orientation 1

45	25	4	22	45
189	44	P249	39	189
189	189	36	189	189
		189		

Orientation 2

45	5	1	8	45
189	36	P249	40	189
189	165	39	189	189
189	189	189		

Orientation 3

45	23	3	16	45
189	40	P249	42	189
189	175	39	189	189
189	189	189		

Orientation 4

45	16	2	17	45
189	37	P249	40	189
189	189	43	189	189
		189		

189	189	189	189	189
189	187	36	187	189
189	42	P249	39	189
	189	40	189	
		189		

7.3 Avec quatre triangles-équerres

7.3.1 Pièce 61

	Orientation 1				
	*	*	*		
	*	P61	*		
	*	*	*		
	Orientation 2				
	16	8	2	4	16
	171	35	P61	32	171
	171	69	33	171	171
	171	171	171	171	
	Orientation 3				
	16	6	3	9	16
	171	33	P61	35	171
	171	154	35	171	171
	171	171	171	171	
	Orientation 4				
	*	*	*		
	*	P61	*		
	*	*	*		

	171	171	171	
	171	170	171	171
	171	35	152	171
171	35	P61	36	171
171	169	35	171	
171	171	171		

7.3.2 Pièce 72

	16	15	2	1	3
	171	171	37	P72	34
		171	168	34	171
		171	171	171	

Orientation 2

	*	*	*
	*	P72	*
	*	*	*

Orientation 3

	*	*	*
	*	P72	*
	*	*	*

Orientation 4

	16	2	1	4	16
	171	34	P72	35	171
	171	159	38	171	171
	171	171	171		

			171		
		171	151	171	171
	171	171	38	156	171
171	164	38	P72	36	171
	171	166	35	171	
	171	171	171		

7.3.3 Pièce 98

Orientation 1

16	4	2	3	16
171	38	P98	36	171
171	158	36	171	171
171	171	171		

Orientation 2

16	5	2	7	16
171	33	P98	38	171
171	170	34	171	171
171	171	171		

Orientation 3

16	5	2	7	16
171	34	P98	36	171
171	165	41	171	171
171	171	171		

Orientation 4

16	15	1	4	13	15	16
171	171	36	P98	33	171	171
	171	160	37	171	171	
	171	171	171			

	171	171	171	171	171
171	171	168	37	153	171
171	166	37	P98	31	171
	171	155	35	171	
	171	171	171		

7.3.4 Pièce 112

		Orientation 1			
	16	1	1	4	16
	171	34	P112	39	171
	171	166	32	171	171
	171	171	171		

		Orientation 2			
	*	*	*		
	*	P112	*		
	*	*	*		

		Orientation 3			
	*	*	*		
	*	P112	*		
	*	*	*		

		Orientation 4			
	*	*	*		
	*	P112	*		
	*	*	*		

			171		
171	171	171	41	171	
171	163	36	P112	38	171
171	171	170	29	171	
	171	171	171		

7.3.5 Pièce 190

		Orientation 1				
	*	*	*			
	*	P190	*			
	*	*	*			

		Orientation 2				
	16	13	5	1	3	16
	171	171	39	P190	37	171
		171	170	39	170	171
		171	171	171	171	171

		Orientation 3				
	*	*	*			
	*	P190	*			
	*	*	*			

		Orientation 4				
	16	15	4	1	4	16
	171	171	41	P190	38	171
		171	164	37	171	171
		171	171	171		

		171		
171	171	169	171	171
171	166	36	157	171
171	41	P190	38	171
171	149	37	171	
171	171	171		

7.3.6 Pièce 249

		Orientation 1				
	16	2	1	4	15	16
	171	37	P249	35	171	171
	171	166	31	171	171	
	171	171	171			

		Orientation 2				
	16	2	1	2	16	
	171	35	P249	35	171	
	171	149	31	171	171	
	171	171	171			

		Orientation 3				
	*	*	*			
	*	P249	*			
	*	*	*			

		Orientation 4				
	16	3	1	2	16	
	171	34	P249	35	171	
	171	154	40	171	171	
	171	171	171			

		171	171	171	171
	171	163	33	161	171
171	165	38	P249	36	171
	171	168	33	169	171
	171	171	168	171	171
		171	171	171	