

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΕΙΡΟΤΕΡΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

ΕΝΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ

Παπαρρίζου Αναστασία και Δόσιος Κωνσταντίνος

Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστημίου Μακεδονίας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Παρουσιάζονται παραδείγματα του προβλήματος αντιστοίχισης, στα οποία ένας πρόσφατα ανακαλυφθείς αλγόριθμος εξωτερικών σημείων εκτελεί το μέγιστο δυνατό πλήθος επαναλήψεων που έχει αποδειχθεί από την ανάλυση χειρότερης περίπτωσης. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι το πλήθος επαναλήψεων στα παραδείγματα διάστασης n είναι $n(n+1)/2$, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι το γνωστό όριο πολυπλοκότητας χειρότερης περίπτωσης, $O(n^3)$, δεν μπορεί να βελτιωθεί για τον αλγόριθμο αυτό.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης, προβλήματα αντιστοίχισης, αλγόριθμοι.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάπτυξη παραδειγμάτων στα οποία επαναληπτικοί αλγόριθμοι εκτελούν μεγάλο πλήθος επαναλήψεων, μπορεί απ' ότι γνωρίζουμε, να χρησιμοποιηθεί στην εξαγωγή αποτελεσμάτων πολυπλοκότητας χειρότερης περίπτωσης με δύο τρόπους. Πριν περιγράψουμε τους δυο τρόπους ας ανακαλέσουμε στη μνήμη μας μερικές απλές έννοιες. Έστω n η διάσταση του προβλήματός και $O(f(n))$ το πλήθος των επαναλήψεων στη χειρότερη περίπτωση. Αν ο αλγόριθμος παίρνει χρόνο $O(g(n))$ σε κάθε επανάληψη, η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου είναι της τάξης $O(f(n)g(n))$.

Ο πρώτος τρόπος εξαγωγής αποτελεσμάτων εφαρμόζεται σε αλγόριθμους των οποίων η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης είναι άγνωστη. Η ανάπτυξη παραδειγμάτων στα οποία ο αλγόριθμος εκτελεί $\Theta(f(n))$ επαναλήψεις με χρόνο $\Theta(g(n))$ σε κάθε επανάληψη, αποδεικνύει αμέσως ότι η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης είναι της τάξης $\Omega(f(n)g(n))$. Τα παραδείγματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται κυρίως για να αποδειχθεί ότι ένας αλγόριθμος δεν είναι πολυωνυμικός. Χαρακτηριστικός εκπρόσωπος της κατηγορίας αυτής είναι η κλασική

εργασία των Klee-Minty [KM1972], με την οποία λύθηκε ένα από τα πιο γνωστά ανοιχτά προβλήματα της εποχής εκείνης, αν δηλαδή ο αλγόριθμος *simplex* του Dantzig [Dan1949, 1963] για το γραμμικό πρόβλημα είναι πολυωνυμικός ή όχι. Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκαν γραμμικά προβλήματα διάστασης n , στα οποία ένας απλός κανόνας περιστροφής του αλγορίθμου *simplex* εκτελεί $2^n - 1$ επαναλήψεις, αποδεικνύοντας έτσι ότι ο αλγόριθμος *simplex* δεν είναι πολυωνυμικός. Στη συνέχεια ο Jeroslow [Jer1973] απέδειξε παρόμοια αποτελέσματα για τους δύο πιο γνωστούς κανόνες περιστροφής, τον κανόνα του μέγιστου στοιχείου, που είναι γνωστός και σαν κανόνας *Dantzig*, και τον κανόνα της μέγιστης αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Παρόμοια αποτελέσματα για άλλους κανόνες περιστροφής παρουσιάζονται στις εργασίες Avis-Chvatal [AC1978], Goldfarb-Sit [GS1979], Roos [Roo1990] και Paparrizos [Pap1989]. Στο χώρο του Δικτυακού Προγραμματισμού αναπτύχθηκαν παρόμοια παραδείγματα από τον Zadeh [Zad1973a, 1973b] και τον Cunningham [Cun1979].

Στο δεύτερο τρόπο η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου, ως πούμε $O(h(n))$, είναι γνωστή. Στην περίπτωση αυτή η ανάπτυξη παραδειγμάτων στα οποία ο αλγόριθμος παίρνει χρόνο $\Theta(h(n))$ αποδεικνύει αμέσως ότι το όριο πολυπλοκότητας χειρότερης περίπτωσης είναι πράγματι $O(h(n))$. Η ανάπτυξη τέτοιων παραδειγμάτων είναι πολύ σημαντική γιατί αποτρέπει τους ερευνητές από την μάταια προσπάθεια βελτίωσης του παραπάνω ορίου. Τα αποτελέσματα αυτού του τύπου αναπτύσσονται κυρίως για πολυωνυμικούς αλγορίθμους και εμφανίζονται συχνά για αλγορίθμους Δικτυακού Προγραμματισμού. Ο Balinski [Bal1986] χρησιμοποιώντας προηγούμενα αποτελέσματά του για την επιβεβαίωση της πρόβλεψης Hirsch στα πολύεδρα του Προβλήματος Μεταφοράς [Bal1984], ανέπτυξε παραδείγματα του Προβλήματος Αντιστοίχισης (ΠΑ), στα οποία οι δικοί του αλγόριθμοι υπογραφών [Bal1986 και 1985] παίρνουν χρόνο $\Theta(n^3)$. Σημειώνουμε εδώ ότι οι αλγόριθμοι υπογραφών είναι οι πρώτοι αλγόριθμοι που επιτυγχάνουν το καλύτερο γνωστό όριο χειρότερης περίπτωσης $O(n^3)$.

Πρόσφατα ανακαλύφθηκαν νέοι αλγόριθμοι για το Πρόβλημα Αντιστοίχισης [Pap1991], [AKP1991], [Pap1995]. Οι αλγόριθμοι αυτοί κατασκευάζουν ακολουθίες σημείων, τα οποία δεν είναι εφικτά ούτε στο πρωτεύον ούτε στο δυϊκό πρόβλημα. Γι' αυτό το λόγο ονομάζονται Αλγόριθμοι Εξωτερικών Σημείων (Α.Ε.Σ.). Προκαταρκτικές υπολογιστικές μελέτες, [AKP1991] και [PPS2006] αποκαλύπτουν ότι οι αλγόριθμοι αυτοί είναι αποτελεσματικοί στην πράξη. Ιδιαίτερα ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στην εργασία [Pap1995], που επιτυγχάνει κι αυτός το καλύτερο γνωστό όριο πολυπλοκότητας χειρότερης περίπτωσης $O(n^3)$ και είναι ικανοποιητικά αποτελεσματικός στην πράξη, αρχικοποιείται με ένα πρωτότυπο πράγματι τρόπο θέτοντας όλες τις μεταβλητές (πρωτεύουσες και δυϊκές) ίσες με μηδέν. Είναι δε, κατά την άποψή μας, ο πιο απλός αλγόριθμος για το Πρόβλημα Αντιστοίχισης. Στην εργασία αυτή περιγράφονται παραδείγματα στα οποία ο αλγόριθμος αυτός εκτελεί $n(n+1)/2$ επαναλήψεις και παίρνει χρόνο $\Theta(n^3)$. Αποδεικνύεται έτσι ότι το παραπάνω όριο επαναλήψεων δεν μπορεί να βελτιωθεί γι' αυτό τον αλγόριθμο.

Το υπόλοιπο τμήμα τη εργασίας οργανώνεται ως εξής. Στο επόμενο τμήμα περιγράφεται το ΠΑ και οι συνθήκες βελτιστότητας. Ο αλγόριθμος περιγράφεται στο τμήμα 3. Τα παραδείγματα και οι βέλτιστες λύσεις τους περιγράφονται στο τμήμα 4. Στο τμήμα 5 αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος εκτελεί συνολικά $n(n+1)/2$ επαναλήψεις σε παραδείγματα διάστασης n .

2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΤΗΤΑΣ

Η μαθηματική μορφή του ΠΑ είναι η παρακάτω:

$$(ΠΑ): \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.1a)$$

$$\mu.π. \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.1b)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2.1c)$$

όπου η λέξη $\max$ σημαίνει να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης και η συντόμευση $\mu.π.$ πηγάζει από την έκφραση “με περιορισμούς”. Το διπλό άθροισμα της σχέσης (2.1a) ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση*, οι ισότητες (2.1b) *ισοτικοί περιορισμοί* και οι ανισότητες (2.1c) *περιορισμοί μη αρνητικότητας* ή *φυσικοί περιορισμοί*. Οι μεταβλητές x_{ij} είναι οι άγνωστες μεταβλητές, οι οποίες πολλές φορές θα ονομάζονται *μεταβλητές αποφάσεων* ή *πρωτεύουσες μεταβλητές*. Προφανώς το ΠΑ ορίζεται πλήρως από την τετραγωνική μήτρα C , τα στοιχεία c_{ij} της οποίας είναι οι συντελεστές της *αντικειμενικής συνάρτησης*. Ο αριθμός n είναι η διάσταση του ΠΑ.

Από τους περιορισμούς (2.1b) και (2.1c) προκύπτει αμέσως ότι είναι:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad \text{για } i, j=1, 2, \dots, n$$

Στην πράξη οι *περιορισμοί μη αρνητικότητας* (2.1c) αντικαθίστανται συνήθως με τους περιορισμούς

$$x_{ij} = 0 \text{ ή } 1, \quad \text{για } i, j=1, 2, \dots, n$$

Έτσι, αν $x_{ij} = 1$, η γραμμή i αντιστοιχεί στη στήλη j της μήτρας C και αντίστροφα, γεγονός από το οποίο προέρχεται το όνομα του προβλήματος. Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι θα υπάρχουν ακριβώς n μεταβλητές απόφασης x_{ij} ίσες με 1. Κάθε μια από αυτές τις ‘μοναδιαίες’ μεταβλητές ικανοποιεί ακριβώς 2 ισοτικούς περιορισμούς (2.1b), γεγονός που συνεπάγεται ότι τα αντίστοιχα στοιχεία c_{ij} είναι τοποθετημένα έτσι ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη της μήτρας C να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο που αντιστοιχεί σε μια *μοναδιαία μεταβλητή απόφασης*.

Μια λύση είναι ένα σημείο $x=(x_{ij})$ και θα ονομάζεται *εφικτή*, αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του ΠΑ. Μια *εφικτή* λύση είναι *βέλτιστη*, αν η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, που συχνά ονομάζεται *αντικειμενική τιμή*, είναι η μέγιστη δυνατή. Είναι γνωστό ότι η λύση x είναι *βέλτιστη*, αν υπάρχουν δυϊκές μεταβλητές

$$u_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{που αντιστοιχούν στις γραμμές της μήτρας } C),$$

$$v_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (\text{που αντιστοιχούν στις στήλες της μήτρας } C),$$

οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω δύο συνθήκες

$$s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2.2a)$$

$$s_{ij} x_{ij} = 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2.2b)$$

Οι μεταβλητές s_{ij} ονομάζονται *ελλειμματικές μεταβλητές*.

Οι σχέσεις (2.2a) ονομάζονται *περιορισμοί δυϊκής εφικτότητας* και δηλώνουν ότι οι μεταβλητές u_i και v_j είναι *εφικτές* στο πρόβλημα:

$$(\Delta\text{Π}): \min \sum_{j=1}^n (u_j + v_j) \quad (2.3a)$$

$$\text{μ.π. } u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (2.3b)$$

το οποίο είναι γνωστό ως Δυϊκό Πρόβλημα (ΔΠ) του ΠΑ. Το ΠΑ θα ονομάζεται πολλές φορές Πρωτεύον Πρόβλημα (ΠΠ). Οι σχέσεις (2.2b) ονομάζονται *συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας* και δηλώνουν ότι για κάθε ζευγάρι τιμών i, j τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές x_{ij}, s_{ij} είναι ίση με μηδέν.

Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτει ότι το ΠΑ επιλύεται, αν υπολογιστούν τιμές των μεταβλητών x_{ij}, u_i και v_j για $i, j=1, 2, \dots, n$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1b), (2.1c), (2.2a) και (2.2b). Τότε οι μεν τιμές των x_{ij} αποτελούν βέλτιστη λύση του ΠΑ, οι δε τιμές των u_i και v_j αποτελούν βέλτιστη λύση για το ΔΠ. Επιπλέον, οι αντικειμενικές τιμές των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων είναι ίσες.

Το ΠΑ πολλές φορές παριστάνεται με ένα διμερές γράφημα $G=(R, D, A)$, όπου $R=D=\{1, 2, \dots, n\}$ είναι τα δύο σύνολα κόμβων και $A=\{(i, j): i \in R, j \in D\}$ είναι το σύνολο των τόξων. Τα στοιχεία του συνόλου R (D) αντιστοιχούν στις γραμμές (στήλες) της μήτρας C . Στα σχήματα οι κόμβοι του συνόλου R θα παριστάνονται με κύκλους και οι κόμβοι του συνόλου D με τετράγωνα. Τα τόξα (i, j) κατευθύνονται από τους κόμβους γραμμές i στους κόμβους στήλες j .

Μερικοί αλγόριθμοι σε κάθε επανάληψη υπολογίζουν ένα δέντρο T του γραφήματος G . Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάζονται *περιστροφικοί* ή *τύπου simplex*. Τα τόξα του δέντρου T ονομάζονται *βασικά* και τα υπόλοιπα *μη βασικά*. Δοθέντος ενός δέντρου T μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές των x_{ij} ως εξής. Για κάθε *μη βασική* μεταβλητή θέτουμε $x_{ij}=0$ και υπολογίζουμε τις τιμές των *βασικών* μεταβλητών από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.1b). Το σύστημα αυτό έχει ακριβώς μία λύση. Η λύση που υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο ονομάζεται *βασική λύση*. Προφανώς μία *βασική λύση* είναι εφικτή, αν είναι $x_{ij} \geq 0$ για κάθε $(i, j) \in T$. Μπορούμε επίσης να υπολογίζουμε τις τιμές των δυϊκών μεταβλητών από την επίλυση του συστήματος:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad \text{για κάθε } (i, j) \in T$$

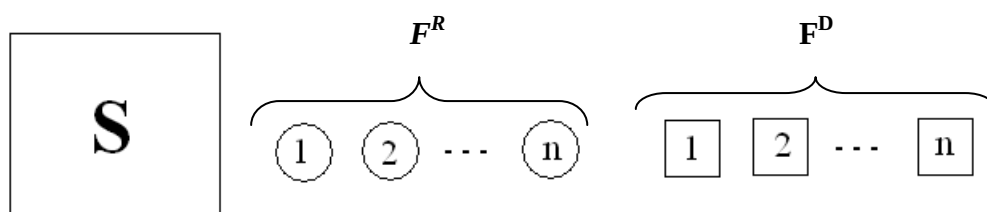
Επειδή το σύστημα αυτό έχει $2n-1$ εξισώσεις και $2n$ άγνωστους, επιλέγεται μια μεταβλητή, ας πούμε η u_i , τίθεται $u_i=\delta$ και οι τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών υπολογίζονται ως συνάρτηση της τιμής δ . Μπορεί όμως εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι τιμές s_{ij} είναι ανεξάρτητες της τιμής δ . Επειδή είναι $x_{ij}=0$ για κάθε $(i, j) \notin T$ και $s_{ij}=0$ για κάθε $(i, j) \in T$. Οι περιστροφικοί αλγόριθμοι ικανοποιούν τη *συνθήκη της συμπληρωματικής χαλαρότητας* σε όλη τη διάρκεια των υπολογισμών.

3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Ο αλγόριθμος ξεκινά τους υπολογισμούς θέτοντας $x_{ij}=0, u_i=0$ και $v_j=0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ και ικανοποιεί τους περιορισμούς (2.1c) και (2.2b) σε όλη τη διάρκεια των υπολογισμών. Αν ένας περιορισμός του τύπου (2.1b) ικανοποιηθεί σε κάποιο σημείο των υπολογισμών, παραμένει ικανοποιημένος σε όλη τη διάρκεια των μετέπειτα υπολογισμών. Αντίθετα, είναι δυνατόν σε κάποιο σημείο να ικανοποιηθούν οι συνθήκες της δυϊκής εφικτότητας (2.2a) (ή οι ισοδύναμες τους (2.3b)) και σε επόμενες επαναλήψεις να μην ικανοποιούνται. Όμως στο τέλος των υπολογισμών η δυϊκή εφικτότητα αποκαθίσταται ταυτόχρονα με την ικανοποίηση του τελευταίου περιορισμού του τύπου (2.1b) υπολογίζοντας έτσι μια βέλτιστη λύση. Επειδή ο

αλγόριθμος υπολογίζει σημεία, τα οποία δεν είναι εφικτά σε όλη τη διάρκεια των υπολογισμών, ούτε στο πρωτεύον πρόβλημα ούτε στο δυϊκό, ο αλγόριθμος είναι προφανώς ένας αλγόριθμος εξωτερικών σημείων.

Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου υπολογίζεται η μήτρα $S=(s_{ij})$ ή ισοδύναμα οι δυϊκές μεταβλητές u_i και v_j για $i, j=1,2,\dots,n$. Υπενθυμίζουμε ότι το αρχικό σημείο τίθεται $u_i=0$ και $v_j=0$ για $i, j=1,2,\dots,n$ και επομένως αρχικά είναι $S=C$. Υπολογίζεται επίσης ένα δάσος F από ριζωμένα δέντρα του γραφήματος $G=(R, D, A)$, το οποίο διαμερίζεται σε δύο υποδάση F^R και F^D . Το αρχικό δάσος αποτελείται από τους κόμβους του γραφήματος G και δεν περιέχει τόξα. Στο αρχικό δάσος όλοι οι κόμβοι είναι ρίζες, το αρχικό υποδάσος F^R περιέχει όλους τους κόμβους γραμμές ενώ το υποδάσος F^D περιέχει όλους τους κόμβους στήλες, βλέπε Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1 Εποπτική παρουσίαση του σημείου ξεκινήματος

Υπενθυμίζουμε ότι στα ριζωμένα δέντρα υπάρχει ένας διακεκριμένος κόμβος, η *ρίζα* και οι υπόλοιποι κόμβοι διατάσσονται σε επίπεδα $1,2,\dots,h$. Η ρίζα βρίσκεται στο επίπεδο μηδέν. Το επίπεδο k στο οποίο βρίσκεται ένας κόμβος ονομάζεται *βάθος του κόμβου*. Το μέγιστο βάθος κόμβου ονομάζεται *βάθος του δέντρου*. Αν T είναι ένα ριζωμένο δέντρο, w ένας κόμβος στο επίπεδο k και z ένας κόμβος στο επίπεδο $k+1$ και το δέντρο περιέχει ένα από τα τόξα (w, z) και (z, w) , ο κόμβος w θα ονομάζεται *γονέας* του κόμβου z και κόμβος z *παιδί* του κόμβου w . Ένας κόμβος που δεν έχει παιδιά θα ονομάζεται *φύλλο*. Ένα δέντρο με ρίζα τον κόμβο k θα συμβολίζεται μερικές φορές με T_k . Τα τόξα ενός ριζωμένου δέντρου διαμερίζονται σε δύο σύνολα. Τα τόξα του ενός συνόλου κατευθύνονται μακριά από τη ρίζα και ονομάζονται *προς τα κάτω* και τα τόξα του άλλου συνόλου κατευθύνονται προς τη ρίζα και ονομάζονται *προς τα πάνω*.

Σε κάθε επανάληψη η μήτρα S και το δάσος F ανανεώνονται ως εξής. Πρώτα επιλέγεται ένα τόξο (g, h) με τη σχέση

$$s_{gh}=\min \{s_{ij}: i\in F^R, j\in F^D\}=\delta$$

Προσέξτε ότι ο κόμβος g είναι ένας κόμβος γραμμή του δάσους F^R και ο κόμβος h είναι ένας κόμβος στήλη του δάσους F^D . Το τόξο (g, h) εισάγεται στο τρέχον δάσος F σχηματίζοντας έτσι το γράφημα $F \cup (g, h)$. Το τόξο (g, h) θα ονομάζεται *εισερχόμενο τόξο*. Μετά υπολογίζεται ένα υποδέντρο T^* ως εξής. Υπολογίζεται ο βαθμός του κόμβου $h \in F^D$ χρησιμοποιώντας μόνο τόξα του δάσους F , δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη το εισερχόμενο τόξο (g, h) . Συμβολίζουμε με $d(j)$ το *βαθμό του κόμβου* j . Θα επιβεβαιωθεί αργότερα από τους κανόνες του αλγορίθμου ότι είναι $0 \leq d(j) \leq 2$ για κάθε κόμβο στήλη του δάσους F . Ένας κόμβος k με $d(k)=0$ θα ονομάζεται *απομονωμένη ρίζα* ή *απομονωμένος κόμβος*.

Για τον υπολογισμό του T^* διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 ($d(h) > 0$): Στην περίπτωση αυτή ο κόμβος στήλη h δεν είναι απομονωμένη ρίζα.

Υποπερίπτωση 1 ($d(h) = 1$): Ο κόμβος h είναι ρίζα ενός δέντρου. Τίθεται $T^*=T_h$ και ανανεώνεται το δάσος με τις σχέσεις

$$F^D \leftarrow F^D \sim T^*, \quad F^R \leftarrow F^R \cup (g, h) \cup T^*$$

Υποπερίπτωση 2 ($d(h) = 2$): Ο κόμβος h δεν είναι ρίζα. Έστω k ο πατέρας του h . Διαγράφεται το τόξο $(k, h) \in F^D$, τίθεται $T^* = T_h$ και ανανεώνεται το δάσος με τις σχέσεις

$$F^D \leftarrow F^D \sim (k, h) \sim T^*, \quad F^R \leftarrow F^R \cup (g, h) \cup T^*$$

Το τόξο (k, h) ονομάζεται *εξερχόμενο*. Προσέξτε ότι το εξερχόμενο τόξο είναι πάντα ένα προς τα κάτω τόξο κάποιου δέντρου του F^D .

Περίπτωση 2 ($d(h) = 0$): Ο κόμβος $h \in F^D$ είναι *απομονωμένη ρίζα*. Έστω T_i το μοναδικό δέντρο του F^R που περιέχει τον κόμβο γραμμή g . Τίθεται $T^* = T_i$ και ανανεώνεται το δάσος F με τις σχέσεις

$$F^D \leftarrow F^D \cup (g, h) \cup T^*, \quad F^R \leftarrow F^R \sim T_i$$

Ο συμβολισμός $x \leftarrow y$ δηλώνει ότι το αντικείμενο x αντικαθίσταται από το αντικείμενο y . Μια επανάληψη στην οποία εφαρμόζεται η περίπτωση 1(2) θα ονομάζεται *επανάληψη τύπου 1(2)* ή *τύπου A(B)*.

Ο αλγόριθμος σταματά τους υπολογισμούς όταν το δάσος F^R εξαφανιστεί, δηλαδή γίνει $F^R = \emptyset$. Τονίζουμε εδώ ότι για τα δάση ισχύουν όλα όσα έχουμε αναφέρει για τους *περιστροφικούς αλγόριθμους* υπό την προϋπόθεση ότι για κάθε κόμβο ρίζα k η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή είναι ίση με μηδέν.

Οι πρωτεύουσες μεταβλητές x_{ij} δεν είναι απαραίτητο να υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη, αν και κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Ο λόγος πηγάζει από το γεγονός ότι οι τιμές x_{ij} μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από το τελικό δάσος F , για το οποίο όπως έχουμε ήδη αναφέρει ισχύει η σχέση $F = F^D$ (αφού είναι $F^R = \emptyset$). Πιο συγκεκριμένα, αν το τόξο $(i, j) \in F$ είναι *προς τα πάνω*, είναι $x_{ij} = 1$. Όλες οι υπόλοιπες πρωτεύουσες μεταβλητές έχουν τιμή 0. Γι' αυτό το λόγο δεν υπολογίζουμε τις μεταβλητές x_{ij} .

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου δεν απαιτείται υπολογισμός των δυϊκών μεταβλητών, αλλά μόνο των τιμών s_{ij} . Όμως οι δυϊκές μεταβλητές θα χρησιμοποιηθούν στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων και γι' αυτό το λόγο θα περιγράψουμε αμέσως τώρα πώς ανανεώνονται. Αν η επανάληψη είναι *τύπου 1* τίθεται:

$$\left. \begin{array}{ll} u_i \leftarrow u_i - \delta, & \text{αν } i \in T^* \\ u_i \leftarrow u_i, & \text{αν } i \notin T^* \end{array} \right\} \quad (3.1a)$$

$$\left. \begin{array}{ll} v_j \leftarrow v_j + \delta, & \text{αν } j \in T^* \\ v_j \leftarrow v_j, & \text{αν } j \notin T^* \end{array} \right\} \quad (3.1b)$$

Αντίθετα, στις επαναλήψεις *τύπου 2* η ανανέωση γίνεται με τους τύπους:

$$\left. \begin{array}{ll} u_i \leftarrow u_i + \delta, & \text{αν } i \in T^* \\ u_i \leftarrow u_i, & \text{αν } i \notin T^* \end{array} \right\} \quad (3.2a)$$

$$\left. \begin{array}{ll} v_j \leftarrow v_j - \delta, & \text{αν } j \in T^* \\ v_j \leftarrow v_j, & \text{αν } j \notin T^* \end{array} \right\} \quad (3.2b)$$

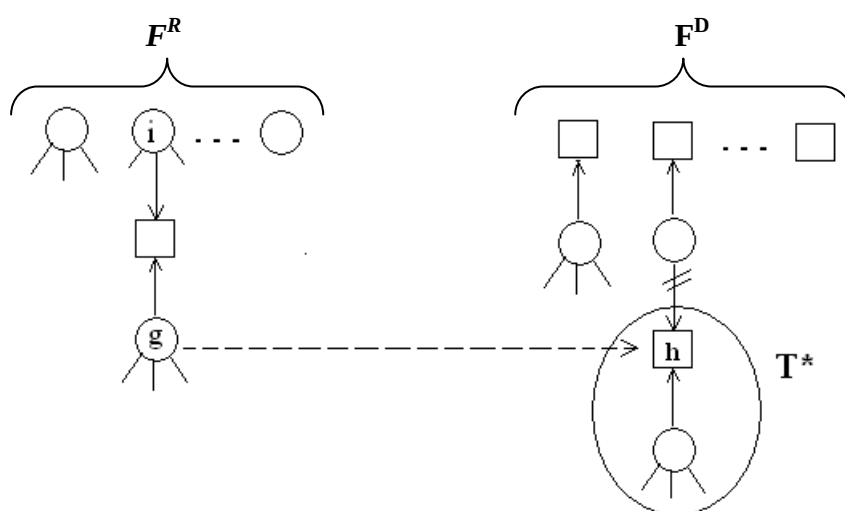
Με τη χρήση των σχέσεων (3.1) και (3.2) μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι η ανανέωση των τιμών των μεταβλητών s_{ij} μπορεί να γίνει απ' ευθείας στη μήτρα S με τους παρακάτω τύπους. Αν η επανάληψη είναι *τύπου 1* τίθεται:

$$\left. \begin{array}{l} s_{ij} \leftarrow s_{ij} + \delta, \quad \text{αν } i \in T^* \quad \text{και } j=1,2,\dots,n \\ s_{ij} \leftarrow s_{ij} - \delta, \quad \text{αν } i \notin T^* \quad \text{και } i=1,2,\dots,n \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

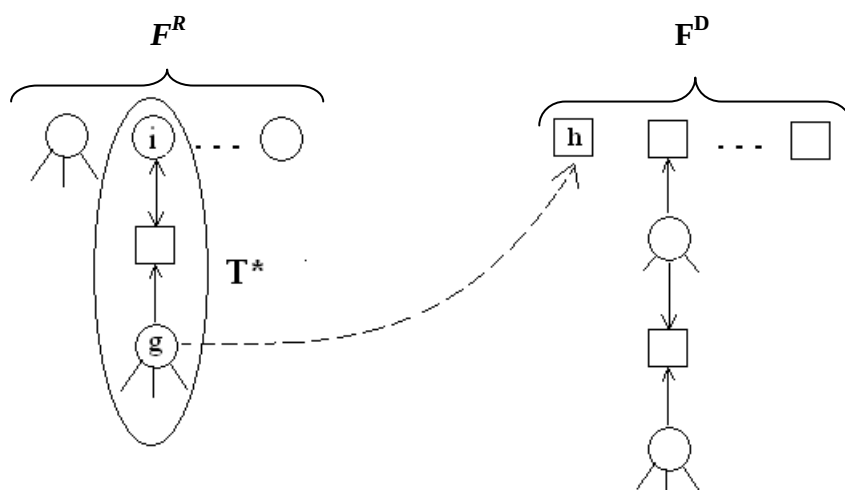
Αν η επανάληψη είναι *τύπου 2* η ανανέωση γίνεται με τους τύπους:

$$\left. \begin{array}{l} s_{ij} \leftarrow s_{ij} - \delta, \quad \text{αν } j \in T^* \quad \text{και } j=1,2,\dots,n \\ s_{ij} \leftarrow s_{ij} + \delta, \quad \text{αν } j \notin T^* \quad \text{και } i=1,2,\dots,n \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται μια επανάληψη τύπου 1 και στο Σχήμα 3.2 μια επανάληψη τύπου 2



Σχήμα 3.2 Ανανέωση των F^R και F^R σε μια επανάληψη τύπου 1(υποπερίπτωση 2)



Σχήμα 3.3 Ανανέωση των F^R και F^R σε μια επανάληψη τύπου 2

Από πλευράς υπολογισμού της πολυπλοκότητας, διευκολύνει σημαντικά η ομαδοποίηση των επαναλήψεων σε στάδια. Θα ονομάζουμε *στάδιο* μια μέγιστη ακολουθία διαδοχικών επαναλήψεων *τύπου 1* ακολουθούμενη από μια επανάληψη

τύπου 2. Επειδή η πρώτη επανάληψη είναι τύπου 2 το πρώτο στάδιο αποτελείται πάντοτε από μια επανάληψη.

Το μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων ενός σταδίου μπορεί να υπολογιστεί από τη μορφή του δάσους F^D ακριβώς πριν την πρώτη επανάληψη του σταδίου ως εξής. Έστω k το πλήθος των κόμβων στηλών j του δάσους F^D , οι οποίοι δεν είναι απομονωμένες ρίζες, δηλαδή είναι $d(j) \geq 1$. Επειδή σε κάθε επανάληψη τύπου 1 το δέντρο T^* μεταφέρεται από το δάσος F^D στο δάσος F^R και περιέχει τουλάχιστον ένα κόμβο στήλη που δεν είναι απομονωμένη ρίζα, ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων τύπου 1 είναι k και επομένως το πλήθος επαναλήψεων του σταδίου είναι $k + 1$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πλήθος των σταδίων σε ένα πρόβλημα διάστασης n είναι επίσης n . Στο αρχικό δάσος υπάρχουν n απομονωμένοι κόμβοι γραμμές και n απομονωμένοι κόμβοι στήλες. Στο τέλος του πρώτου σταδίου υπάρχουν ακριβώς $n-1$ απομονωμένοι κόμβοι γραμμές και $n-1$ απομονωμένοι κόμβοι στήλες. Εξετάζοντας τώρα προσεκτικά τους κανόνες του αλγόριθμου μπορεί κάποιος να δει εύκολα ότι αν ένας κόμβος στήλη j σε κάποια επανάληψη πάρει θετικό βαθμό, θα έχει θετικό βαθμό σε όλες τις επόμενες επαναλήψεις. Επιπλέον, αν πάρει βαθμό 2 σε κάποια επανάληψη θα έχει βαθμό 2 σε όλες τις επόμενες επαναλήψεις. Τα παραπάνω σημαίνουν ότι κάθε μη απομονωμένος κόμβος στήλη έχει ακριβώς ένα παιδί, γεγονός που στη συνέχεια συνεπάγεται ότι στο τέλος κάθε σταδίου το πλήθος των απομονωμένων κόμβων στηλών του δάσους F^D ελαττώνεται κατά 1. Άρα, το πλήθος των σταδίων είναι n .

Επειδή στο αρχικό δάσος όλοι οι κόμβοι στήλες είναι απομονωμένοι κόμβοι, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων (τύπου 1 και τύπου 2) του σταδίου t είναι t και το μέγιστο πλήθος των επαναλήψεων του αλγόριθμου είναι:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης ενός σταδίου είναι της τάξης $O(n^2)$, γεγονός που συνεπάγεται ότι η πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης του αλγόριθμου είναι $O(n^3)$.

4. ΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Τα παραδείγματα διάστασης n , στα οποία ο αλγόριθμος εκτελεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, προσδιορίζονται από την $n \times n$ μήτρα κόστους C με στοιχεία

$$c_{ij} = ij, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Προφανώς είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια, όταν θα λέμε παραδείγματα θα εννοούμε τα προβλήματα αντιστοίχισης που προσδιορίζονται από την παραπάνω μήτρα κόστους.

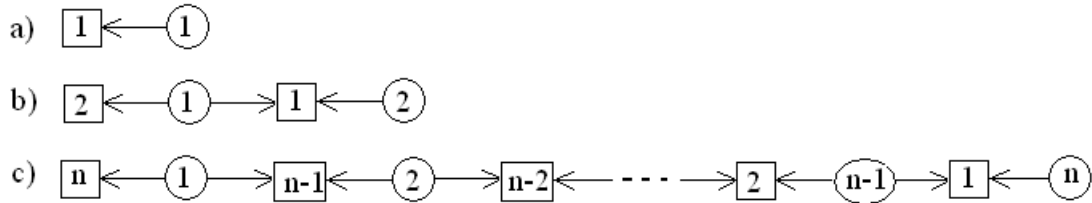
Το βέλτιστο δάσος που υπολογίζει ο αλγόριθμος στο παράδειγμα διάστασης n αποτελείται από ένα δέντρο με ρίζα τον κόμβο στήλη n και επομένως είναι

$$v_n = 0.$$

Στην πραγματικότητα το δέντρο είναι ένας δρόμος από τον κόμβο στήλη n στον κόμβο γραμμή n στον οποίο τα διαδοχικά τόξα είναι

$$(1,n), (1,n-1), (2,n-1), (2, n-2), \dots, (n-1,2), (n-1,1) (n, 1).$$

Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζονται μερικά βέλτιστα δέντρα.



Σχήμα 4.1 Μερικά βέλτιστα δέντρα : a) $n = 1$, b) $n = 2$, $n = 3$, c) γενικό δέντρο για διάσταση n .

Θα δείξουμε πρώτα ότι τα παραπάνω δέντρα είναι βέλτιστα. Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι η λύση του πρωτεύοντος προβλήματος που προκύπτει από το βέλτιστο δάσος είναι

$$x_{1,n} = x_{2,n-1} = \dots = x_{n-1,2} = x_{n,1} = 1,$$

$$x_{ij} = 0, \text{ για κάθε άλλο συνδυασμό των } i, j$$

Με άλλα λόγια, τα κελιά της μήτρας C που αντιστοιχούν σε τιμές $x_{ij} = 1$, είναι αυτά που βρίσκονται στη διαγώνιο που κατευθύνεται από την κάτω αριστερή γωνία στην πάνω δεξιά. Προφανώς, η λύση αυτή είναι εφικτή στο πρωτεύον πρόβλημα (ΠΠ).

Υπολογίζουμε τώρα τη δυϊκή λύση που αντιστοιχεί στο βέλτιστο δέντρο. Θέτουμε αρχικά $v_n=0$ (επειδή ο κόμβος στήλη n είναι ρίζα του δέντρου) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τις υπόλοιπες δυϊκές μεταβλητές με τη σειρά

$$u_1, v_{n-1}, u_2, v_{n-2}, \dots, u_{n-2}, v_2, u_{n-1}, v_1, u_n$$

Πράγματι, επειδή $(1, n)$ είναι το πρώτο τόξο του δρόμου, από την εξίσωση $s_{1n}=c_{1n}-u_1-v_n=0$ και την τιμή $v_n=0$, προκύπτει ότι είναι

$$u_1 = c_{1n} = n$$

Το δεύτερο τόξο του δρόμου είναι $(1,n-1)$ και από τη σχέση $s_{1,n-1}=c_{1,n-1}-u_1-v_{n-1}=0$ προκύπτει ότι είναι

$$v_{n-1} = c_{1,n-1} - u_1 = n - 1 + n = -1$$

Η λύση που θα προκύψει από την παραπάνω διαδικασία είναι:

$$u_i = i(2n - i + 1) / 2, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.1a)$$

$$v_j = -(n - j)(n - j + 1) / 2, \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.1b)$$

Πράγματι για τόξα του βέλτιστου δέντρου που είναι της μορφής $(k, n-k)$ και προφανώς είναι προς τα κάτω, έχουμε

$$\begin{aligned} s_{k,n-k} &= c_{k,n-k} - u_k - v_{n-k} \\ &= k(n - k) - k(2n - k + 1)/2 + (n - n + k)(n - n + k + 1)/2 \\ &= (2kn - 2k^2 - (2kn - k^2 + k) + k^2 + k) / 2 \end{aligned}$$

$$= 0$$

Επίσης, για τα τόξα της μορφής $(k, n-k+1)$, που είναι προς τα πάνω, έχουμε

$$\begin{aligned} S_{k,n-k+1} &= C_{k,n-k+1} - U_k - V_{n-k+1} \\ &= k(n-k+1) - k(2n-k+1)/2 + (n-n+k-1)(n-n+k-1+1)/2 \\ &= (2kn - 2k^2 + 2k - (2kn - k^2 + k) + k^2 - k) / 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα στα χέρια μας μια λύση x_{ij} , η οποία είναι εφικτή στο πρωτεύον πρόβλημα και μια λύση u_i, v_j του δυϊκού προβλήματος, η οποία μαζί με τη λύση x_{ij} ικανοποιεί τη συνθήκη της συμπληρωματικής χαλαρότητας

$$s_{ij} x_{ij} = 0, \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Επομένως μένει ακόμα να δείξουμε ότι η λύση u_i, v_j είναι εφικτή στο δυϊκό πρόβλημα (ΔΠ), δηλαδή ότι είναι $s_{ij} \geq 0$, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$. Προς το σκοπό αυτό επιλέγουμε δείκτες i, j τέτοιους ώστε να ισχύει η σχέση

$$i+j = n+k \quad (4.2)$$

Έτσι, τα στοιχεία που αντιστοιχούν στην τιμή $k=1$ βρίσκονται στη διαγώνιο της μήτρας που κατευθύνεται από την κάτω αριστερή γωνία στην πάνω δεξιά. Τη διαγώνιο αυτή θα την ονομάζουμε *κύρια καταχρηστική διαγώνιο*. Άλλες τιμές του k αντιστοιχούν σε *δευτερεύουσες καταχρηστικές διαγώνιους*. Για παράδειγμα, η τιμή $k=2$ αντιστοιχεί στη *δευτερεύουσα καταχρηστική διαγώνιο*, που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την *κύρια καταχρηστική*. Παίρνοντας τιμές $1 \leq i, j \leq n$ και $k=-(n-1), k=-(n-2), \dots, k=-1, k=0, k=1, \dots, k=n$ διατρέχουμε όλα τα στοιχεία της μήτρας.

Από τη σχέση (4.2) έχουμε $j=n+k-i$ και επομένως είναι:

$$\begin{aligned} S_{i,n+k-i} &= C_{i,n+k-i} - U_i - V_{n+k-i} \\ &= i(n+k-i) - i(2n-i+1)/2 + (-k+i)(-k+i+1)/2 \\ &= (2ni + 2ik - 2i^2 - i(2n-i+1) + (k^2 + i^2 - 2ki - k + i)) / 2 \\ &= (k^2 - k) / 2 = k(k-1) / 2 \end{aligned}$$

Είναι τώρα εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι η παράσταση $k(k-1)/2$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές για ακέραιες τιμές του k . Πράγματι για $k=0$ και $k=1$ είναι $k(k-1)=0$. Για $k \geq 2$ είναι $k(k-1) > 0$. Για $k \leq -1$ είναι $k < 0$ και $k-1 \leq -2 < 0$ και άρα είναι $k(k-1) > 0$. Επομένως, για όλα τα στοιχεία της μήτρας S είναι $s_{ij} \geq 0$. Η γενική μορφή της βέλτιστης μήτρας S φαίνεται στο σχήμα 4.2.

$$\begin{bmatrix} \frac{(n-2)(n-1)}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \dots & \dots & \dots & \frac{n(n-1)}{2} \end{bmatrix}$$

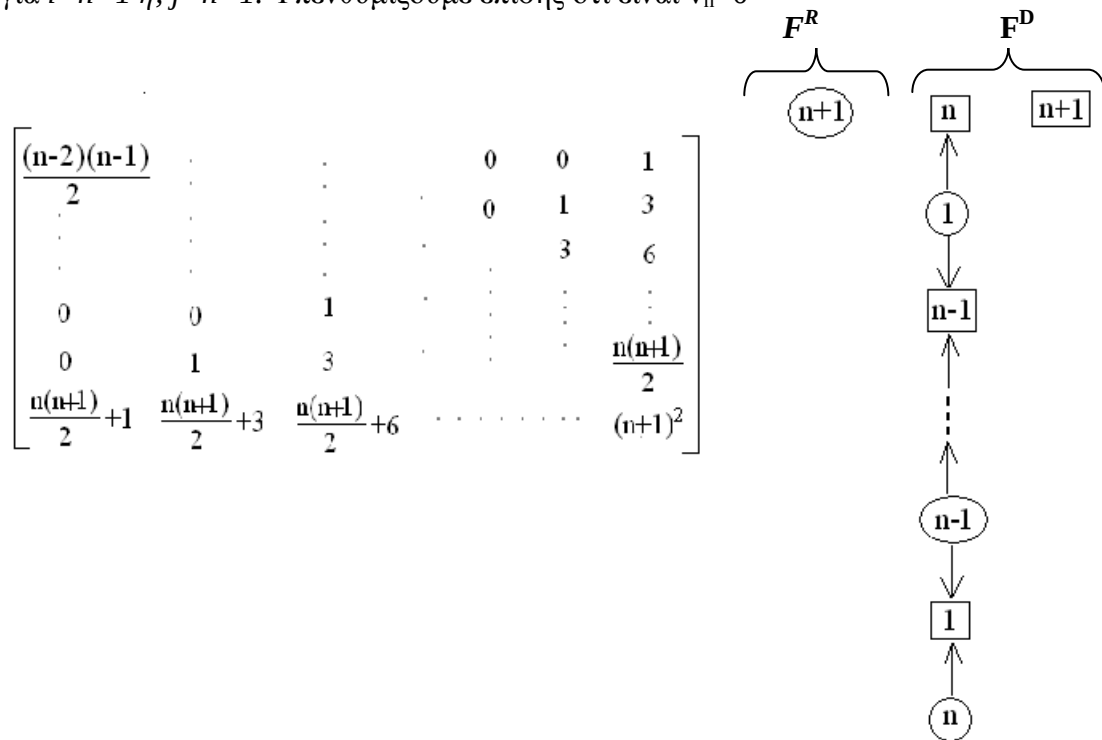
Σχήμα 4.2 Η μορφή της βέλτιστης μήτρας S

5. ΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΕΝΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ

Θα δείξουμε τώρα ότι ο αλγόριθμος εκτελεί ακριβώς $k(k+1)/2$ επαναλήψεις όταν εφαρμόζεται στο παράδειγμα διάστασης k . Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε επαγωγικά ότι ο αλγόριθμος στο στάδιο n εκτελεί n επαναλήψεις. Θυμηθείτε ότι η υπόθεση της επαγωγής ισχύει για $n = 1$ σε κάθε πρόβλημα αντιστοίχισης.

Λήμμα. Έστω ότι ο αλγόριθμος εφαρμοζόμενος στο παράδειγμα διάστασης $n+1$, υπολογίζει πρώτα τη βέλτιστη λύση του παραδείγματος διάστασης n , η οποία περιγράφηκε στο προηγούμενο τμήμα. Τότε, ο αλγόριθμος θα υπολογίσει τη βέλτιστη λύση παραδείγματος διάστασης $n+1$ εκτελώντας $n+1$ επαναλήψεις.

Απόδειξη. Το αρχικό σημείο, ακριβώς πριν την πρώτη επανάληψη του σταδίου $n+1$ φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 5.1. Το σημείο αυτό προκύπτει από το βέλτιστο σημείο του παραδείγματος διάστασης n , θέτοντας $u_{n+1}=0$, $v_{n+1}=0$ και $x_{ij}=0$ για $i=n+1$ ή, $j=n+1$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι είναι $v_n=0$



Σχήμα 5.1 Εποπτική αναπαράσταση αρχικού σημείου του σταδίου $n+1$

Είναι τώρα εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι το j στοιχείο της $n+1$ γραμμής της μήτρας S , όπου $j=1, 2, \dots, n$, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} S_{n+1,j} &= C_{n+1,j} - u_{n+1} - v_j \\ &= j(n+1) + (n-j)(n-j+1)/2 \\ &= n(n+1)/2 + j(j+1)/2, \end{aligned} \quad (5.1a)$$

το i στοιχείο της στήλης $n+1$, όπου $i=1, 2, \dots, n$, από τη σχέση

$$\begin{aligned} S_{i,n+1} &= C_{i,n+1} - u_i - v_{n+1} \\ &= i(n+1) - i(2n-i+1)/2 \\ &= i(i+1)/2 \end{aligned} \quad (5.1b)$$

και είναι

$$s_{n+1,n+1} = c_{n+1,n+1} - u_{n+1} - v_{n+1} = (n+1)^2 \quad (5.1c)$$

Αυτές οι τιμές των στοιχείων της μήτρας S φαίνονται στο Σχήμα 5.1 Από τις σχέσεις (5.1a) και (5.1b) προκύπτει εύκολα ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$s_{n+1,j} < s_{n+1,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

Ακριβώς πριν την πρώτη επανάληψη του σταδίου $n+1$ το υποδάσος F^D περιλαμβάνει όλους τους κόμβους στήλες $1, 2, \dots, n$, βλέπε σχήμα 5.1. Επειδή τα επιλέξιμα για εισερχόμενα τόξα είναι αυτά που τα αντίστοιχα στοιχεία s_{ij} περιλαμβάνονται στη σχέση (5.2) και το τόξο $(n+1, n+1)$, συμπεραίνουμε από τη σχέση (5.2) ότι για την επιλογή του εισερχόμενου τόξου έχουμε

$$\min \{ s_{n+1,j} : j = 1, 2, \dots, n+1 \} = \min \{ s_{n+1,1}, s_{n+1,n+1} \} = s_{n+1,1} = n(n+1)/2 + 1 = \delta_1.$$

Επομένως, εισερχόμενο είναι το τόξο $(n+1, 1)$ και επειδή για τον κόμβο στήλη 1 είναι $d(1) = 2$, μια επανάληψη τύπου 1 (υποπερίπτωση 2) εφαρμόζεται.

Προφανώς εισερχόμενο είναι το τόξο $(n-1, 1)$ και το υποδέντρο T^* αποτελείται από τον κόμβο γραμμή n τον κόμβο στήλη 1 και το μοναδικό τόξο που συνδέει αυτούς τους δύο κόμβους, το τόξο $(n, 1)$. Επειδή η επανάληψη είναι τύπου 1, η ανανέωση των δυϊκών μεταβλητών γίνεται με τους τύπους (3.1). Οι νέες τιμές για τις δυϊκές μεταβλητές u_n και v_1 είναι:

$$u_n \leftarrow u_n - \delta = n(n+1)/2 - n(n+1)/2 - 1 = -1, \quad (5.3a)$$

$$v_1 \leftarrow v_1 + \delta = -n(n-1)/2 + n(n+1)/2 + 1 = n+1, \quad (5.3b)$$

Οι τιμές των υπόλοιπων δυϊκών μεταβλητών παραμένουν ίδιες.

Οι ανανεώσεις των τιμών αυτών επιφέρουν αλλαγές σε μερικά στοιχεία s_{ij} της μήτρας S . Για την κατανόηση όμως των αποδείξεων αρκεί μόνο ο προσδιορισμός των εισερχόμενων τόξων στην επόμενη επανάληψη. Επειδή τώρα το τρέχον υποδάσος F^R περιλαμβάνει τους κόμβους γραμμές $n+1$ και n και τον κόμβο στήλη 1 και το F^D τους υπόλοιπους κόμβους, τα υποψήφια για την επιλογή του εισερχόμενου είναι τα τόξα

$$(i, j) \text{ με } i = n+1, n \text{ και } j \geq 2$$

Από τον τύπο (5.3a) (ισοδύναμα από τους τύπους (3.1)) με τον οποίο ανανεώνονται οι τιμές s_{ij} στην περίπτωση της επανάληψης τύπου 1, έχουμε

$$s_{nj} = s_{nj} + \delta_1 = (j-1)j/2 + n(n+1)/2 + 1 \quad (5.4a)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις τιμές αυτές και τις τιμές του τύπου (5.1a) έχουμε για $j = 2, 3, \dots, n$ ότι

$$s_{n+1,j} - s_{nj} = n(n+1)/2 + j(j+1)/2 - j(j-1)/2 - n(n+1)/2 - 1 = j - 1 > 0$$

Για την τιμή $j = n+1$ η νέα τιμή του $s_{n,n+1}$ είναι

$$s_{n,n+1} = s_{n,n+1} + \delta_1 = n(n+1)/2 + n(n+1)/2 + 1 = n(n+1) + 1 \quad (5.4b)$$

και επομένως είναι

$$s_{n+1,n+1} - s_{n,n+1} = (n+1)^2 + n(n+1)/2 > 0$$

Συμπεραίνουμε τώρα ότι το εισερχόμενο τόξο είναι ένα από τα τόξα

$$(n, 2), (n, 3), \dots, (n, n), (n, n+1)$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.4a) και (5.4b) προκύπτει ότι είναι

$$\min \{ s_{n,j} : j = 2, 3, \dots, n+1 \} = s_{n,2} = n(n+1)/2 + 2 = \delta_2.$$

Επομένως, πριν τη δεύτερη επανάληψη του σταδίου $n+1$ είναι

$$\delta_2 = s_{n,2} = n(n+1)/2 + 2,$$

εισερχόμενο τόξο είναι το $(n, 2)$, εξερχόμενο τόξο είναι το $(n-2, 2)$ και το υποδέντρο T^* περιλαμβάνει τον κόμβο γραμμή $n-1$, τον κόμβο στήλη 2 και το τόξο $(n-1, 2)$.

Τώρα έχουμε θέσει τις βάσεις για να αποδείξουμε τα παρακάτω αποτελέσματα με επαγωγή στον αριθμό t των επαναλήψεων του σταδίου $n+1$.

1) Ακριβώς πριν την $t = 1, 2, \dots, n, n+1$ επανάληψη εισερχόμενο είναι το τόξο $(n-t+2, t)$ για το οποίο είναι

$$\delta_t = s_{n-t+2,t} = n(n+1)/2 + t,$$

εξερχόμενο είναι το τόξο $(n-t, t)$ και το T^* περιέχει τον κόμβο γραμμή $n+2-t$, τον κόμβο στήλη t και φυσικά το τόξο $(n+2-t, t)$. Το τρέχον δάσος ακριβώς πριν την t επανάληψη έχει τη μορφή του Σχήματος 5.2, όπου το εισερχόμενο τόξο απεικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή και οι δυικές μεταβλητές δίνονται από τους τύπους :

$$u_k = \begin{cases} 0, & k = n+1 \\ k(2n-k+1)/2 - n(n+1)/2 - k, & n+2-t \leq k \leq n \\ k(2n-k+1)/2, & 1 \leq k \leq n+1-t \end{cases} \quad (5.5a)$$

$$v_k = \begin{cases} -(n-k)(n-k+1)/2 + n(n+1)/2 + k, & n+2-t \leq k \leq n \\ -(n-k)(n-k+1)/2, & 1 \leq k \leq n+1-t \end{cases} \quad (5.5b)$$

Για την απόδειξη του αποτελέσματος, υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει στις επαναλήψεις $1, 2, \dots, t-1$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει στην επανάληψη t , όπου $t \leq n+1$. Προσέξτε ότι η υπόθεση της επαγωγής ισχύει (το αποδείξαμε ήδη) για τις επαναλήψεις 1 και 2.

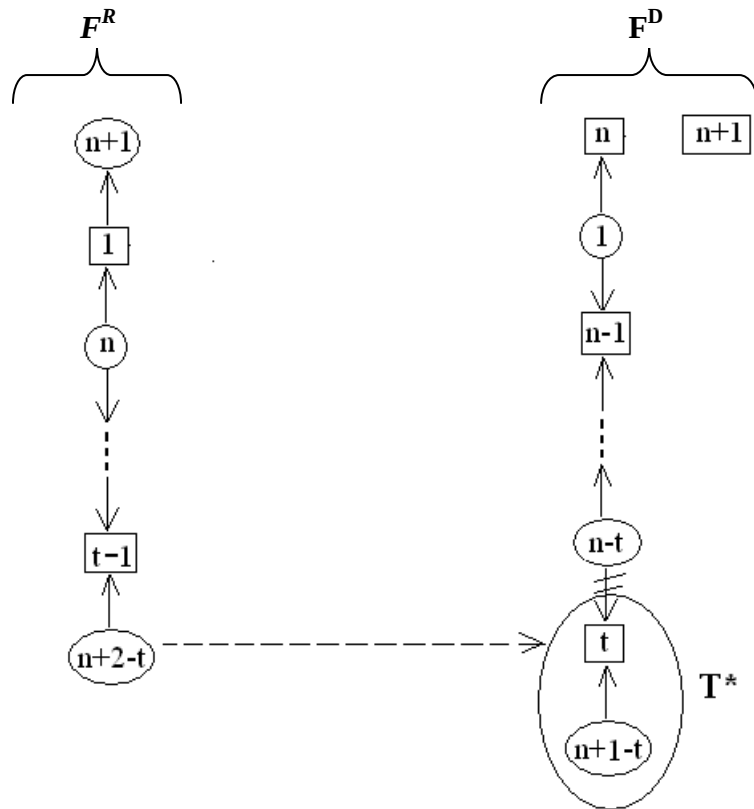
Προφανώς, το εισερχόμενο τόξο θα επιλεγεί από τα τόξα (i, j) με $i = n+1, n, \dots, n+2-t$ και $j = t, t+1, \dots, n, n+1$, τα οποία θα ονομάζονται *επιλέξιμα τόξα*. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι είναι

$$s_{n,j} < s_{n+1,j}, \quad \text{για } j \geq 2$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη είναι αρκετό να δείξουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις

$$a) s_{n+2-k,j} < s_{n+3-k,j}, \quad \text{για } k=3, 4, \dots, t \text{ και } j=t, t+1, \dots, n, n+1$$

$$b) \min \{ s_{n+2-t,j} : j = t, t+1, \dots, n, n+1 \} = s_{n+2-t,t} = n(n+1)/2 + t$$



Σχήμα 5.2 Το τρέχον δέντρο του αλγορίθμου ακριβώς πριν την t επανάληψη του $n+1$ σταδίου

Από τη μορφή της βέλτιστης μήτρας S για το παράδειγμα διάστασης n και την υπόθεση της επαγωγής έχουμε για $t \leq j \leq n+1$

$$s_{n+2-k,j} = (j - k+1)(j - k+2)/2 + n(n+1)/2 + k,$$

$$s_{n+3-k,j} = (j - k+2)(j - k+3)/2 + n(n+1)/2 + k-1,$$

και επομένως

$$\begin{aligned} s_{n+3-k,j} - s_{n+2-k,j} &= (j - k+2)(2j - 2k+4)/2 - 1 \\ &= (j - k+2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Επειδή όμως είναι $j \geq t$ και $k \leq t$ είναι $(j - k+2)^2 - 1 \geq 4 - 1 = 3 \geq 0$. Άρα είναι

$$s_{n+3-k,j} \geq s_{n+2-k,j}$$

Αυτό αποδεικνύει τη σχέση α) για $j < n+1$. Για την τιμή $j = n+1$ είναι

$$s_{n+2-k,n+1} = (n+2 - k)(n+3 - k)/2 + n(n+1)/2 + k,$$

$$s_{n+3-k,n+1} = (n+3 - k)(n+4 - k)/2 + n(n+1)/2 + k-1,$$

και επομένως

$$\begin{aligned} s_{n+3-k,n+1} - s_{n+2-k,n+1} &= (n+3 - k)/2 (2n - 2k - 6)/2 - 1 \\ &= (n+3 - k)^3 - 1 \end{aligned}$$

Επειδή είναι $3 \leq k \leq n$ έχουμε $n+3-k > 0$. Επομένως είναι

$$s_{n+3-k,n+1} \geq s_{n+2-k,n+1}$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του αποτελέσματος α).

Η απόδειξη του αποτελέσματος b) είναι σχετικά εύκολη. Πριν την $t-1$ επανάληψη, οι τιμές $s_{n+2-t,j}$ για $j \geq t$ είναι ίδιες με τις τιμές πριν την πρώτη επανάληψη του σταδίου $n+1$ και επομένως ισχύει η σχέση

$$s_{n+2-t,j} < s_{n+2-t,j+1}, \quad \text{για } j \geq 2 \quad (5.6)$$

Επειδή η επανάληψη $t-1$ είναι *τύπου 1* και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$$\delta_{t-1} = n(n+1)/2 + t - 1,$$

οι τιμές των $s_{n+2-t,j}$ για $j \geq t$ μετά την $t-1$ επανάληψη δίνονται από τη σχέση (3.3), οι σχέσεις (5.6) ισχύουν μετά την $t-1$ επανάληψη. Συμπεραίνουμε ότι είναι

$$\min \{ s_{n+2-t,j} : j \geq t \} = s_{n+2-t,t}$$

Ιδιαίτερα, ακριβώς πριν την t επανάληψη έχουμε (επειδή $n+2-t+t = n+2$)

$$s_{n+2-t,t} = 1 + \delta_{t-1} = 1 + t - 1 = \delta_t$$

Η απόδειξη των τύπων (5.5) είναι πλέον προφανής.

Η επαγωγική διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για τις επαναλήψεις 1, 2, ..., n. Ακριβώς πριν την $n+1$ επανάληψη, το τρέχον δάσος F^D περιέχει μόνο τον κόμβο στήλη $n+1$ και τα *επιλέξιμα* για *εισερχόμενα τόξα* είναι τα τόξα

$$(1, n+1), (2, n+1), \dots, (n, n+1), (n+1, n+1).$$

Η επαγωγική διαδικασία αποδεικνύει αμέσως ότι εισερχόμενο τόξο είναι το τόξο $(1, n+1)$ με

$$s_{1,n+1} = n(n+1)/2 + n+1 = \delta_{n+1}$$

Τώρα όμως εφαρμόζεται μια επανάληψη *τύπου 2* στην οποία T^* είναι το δέντρο (δρόμος) με ρίζα τον κόμβο γραμμή $n+1$. Το T^* περιέχει τους κόμβους στήλες 1, 2, ..., n και τους κόμβους γραμμές 1, 2, ..., n+1. Προφανώς μετά την επανάληψη $n+1$ κατασκευάζεται το βέλτιστο δέντρο του παραδείγματος διάστασης $n+1$. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του τμήματος.

Θεώρημα. Όταν ο αλγόριθμος εφαρμόζεται στο παράδειγμα διάστασης k εκτελεί $k(k+1)/2$ επαναλήψεις.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος εφαρμοζόμενος σε πρόβλημα διάστασης k και εβρισκόμενος στο στάδιο n , όπου $n < k$, εκτελεί n επαναλήψεις. Το αποτέλεσμα αυτό όμως προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο λήμμα με επαγωγή στον αριθμό των σταδίων. Στο στάδιο 1 η υπόθεση της επαγωγής είναι αληθής επειδή σε κάθε ΑΠ το πρώτο στάδιο αποτελείται από μια επανάληψη. Έστω λοιπόν ότι η υπόθεση είναι αληθής στο στάδιο n . Αν στη μήτρα του παραδείγματος διάστασης $n+1$ προσθέσουμε γραμμές και στήλες ώστε το παράδειγμα να γίνει διάστασης $k > n+1$, τα αποτελέσματα του προηγούμενου λήμματος ισχύουν για το παράδειγμα διάστασης k . Πράγματι, σε κάθε επανάληψη του σταδίου $n+1$ ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

- 1) Για κάθε $k \geq n+1$ είναι $s_{k,j} < s_{k+1,j}$
- 2) Για κάθε $j \geq n+1$ είναι $s_{i,j} < s_{i,j+1}$,

Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν επειδή σε όλες τις επαναλήψεις είναι

$$u_k = 0, \text{ για } k \geq n+1 \quad \text{και}$$

$$v_k = 0, \text{ για } k \geq n+1$$

Επίσης τα αποτελέσματα αυτά σημαίνουν ότι στο στάδιο $n+1$ θα εκτελεστούν οι επαναλήψεις όπως ακριβώς περιγράφονται στο προηγούμενο λήμμα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

6 ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [AKP1991] Achatz H., Kleinschmidt P. and Paparrizos K. (1991) “*A dual forest algorithm for the assignment problem*”, DIMACS: Applied Geometry and Discrete Mathematics. Vol. 4, pp. 1-12
- [AC1978] Avis D. and Chvatal V. (1978) “*Notes on Bland’s Pivoting Rule*”. Mathematical Programming Study, B series, pp. 24-34
- [Bal1984] Balinski M. L. (1984) “*The Hirsch conjecture for dual transportation polyhedra*”, Mathematics of Operations Research, 4:629–633.
- [Bal1985] Balinski M. L. (1985) “*Signature methods for the assignment problem*”, Operations Research, 33, 527-537,
- [Bal1986] Balinski, M. L. (1986) “*A competitive (dual) simplex method for the assignment problem*”, Mathematical Programming 34, 125-141.
- [Dan1949] Dantzig G. B. (1949) “*Programming in a Linear Structure*”, Report of the September 9, 1948 meeting in Madison, Econometrica, Vol. 17, pp. 73-74
- [Dan1963] Dantzig G. B. (1963) “*Linear programming and extensions*”. Princeton University Press, New Jersey
- [GS1979] Goldfarb, D. and Sit W. (1979) “*Worst Case Behavior for the Steepest-edge Simplex Method*”, Discrete Applied Mathematics. Vol. 1, pp. 277-285
- [Cun1979] Cunningham W. H. (1979) “*Theoretical properties of the network simplex algorithm*”. Mathematics of Operations Research, Vol.4(2), 196-208
- [KM1972] Klee, V. L. and Minty G. J. (1972) “*How good is the Simplex Algorithm*”, Inequalities III, Academic Press, London and New York, pp. 159-175
- [Jer1973] Jeroslow, R. G. (1973) “*The Simplex Algorithm with the Pivot Rule of Maximizing Improvement Criterion*”, Discrete Mathematics, Vol.4, pp. 367-377
- [Pap1988] Paparrizos, K. (1988) “*A non-dual signature method for assignment problems and a generalization of the dual simplex method for transportation problems*”, RAIRO-Operations Research, Vol. 22(3), pp. 269-289.
- [Pap1989] Paparrizos K. (1989) “*Pivoting Rules Directing the Simplex Method through all Feasible Vertices of Klee-Minty Examples*”, OPSEARCH. Vol.26:2, pp.77-95
- [Pap1991] Paparrizos, K. (1991) “*An Infeasible (Exterior Point) Simplex Algorithm for Assignment Problems*”, Mathematical Programming, Vol. 51, pp. 45-54
- [Pap1995] Paparrizos, K., (1995) “*A simplex type algorithm for assignment problems initialised with a solution that is neither primal nor dual feasible*”, XXI Conference Applications of Mathematics in Industry and Business”, Varna, Bulgaria

“Pythagoras -Funding of research groups in the University of Macedonia, Priority Action 2.2.e, Action 2.2.3, Measure 2.2, to be implemented within the framework of the Operational Programme “Education and Initial Vocational Training II (EPEAEK) and co - financed by the European Union [3rd Community Support Framework, 75% financed by the European Social Fund 25% National Resources]”

- [PPS2006] Papamanthou Ch., Paparrizos K. and Samaras N. (2006) "*A comparative computational study of exterior point algorithms for the assignment problem*", Technical Report, University of Macedonia, Thessaloniki, Greece
- [Roo1990] Roos, C. (1990). "*An Exponential Example for Terlaky's Pivoting Rule for the Criss-Cross Simplex Method*", Mathematical Programming. Vol. 46, pp. 78-94
- [Zad1973a] Zadeh N.(1973a). "*A bad network problem for the simplex method and other minimum cost flow algorithms*",Mathematical Programming. Vol.5, pp.255-266
- [Zad1973b] Zadeh N. (1973b). "*More pathological examples for network flow problems*", Mathematical Programming. Vol. 5, pp. 217-224.