TD11. Langages algébriques et automates à pile (encore)

Exercice 1

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u, v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
– si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{v\}$
– si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{u\}$
– si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u, v) = x.\mathrm{Mel}(u', v) \cup y.\mathrm{Mel}(u, v')$.
Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L, L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u, v)$.

1. On prend $\Sigma = \{a, b\}$ et l'on considère les deux langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est rationnel.

2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?

3. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est algébrique.

4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 2

Montrer que le langage $L = \{(a^n b^n)^m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est.

Exercice 3

Soit L un langage sur l'alphabet Σ. On définit

$$\mathrm{BORD}(L) = \{xz \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xyz \in L \text{ et } |x| = |y| = |z|\}$$

Montrer que pour un langage L rationnel, $\mathrm{BORD}(L)$ est algébrique, mais pas nécessairement rationnel. Si L est algébrique, $\mathrm{BORD}(L)$ est-il toujours algébrique ?

Exercice 4

Montrer que le langage $L = \{a^i b^j c^k \mid j + k \leq i \leq 2j + k\}$ est algébrique.

Exercice 5

Pour tout langage L sur Σ, on définit

$$\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ tel que } |x| = |y| \text{ et } xy \in L\}$$

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n c^m d^3 m, \quad n, m \geq 1\}$ est algébrique.

2. Calculer $\frac{1}{2}L$.

3. Montrer que $\frac{1}{2}L$ n'est pas algébrique.