TD2. Langages rationnels

Exercice 1 *Automates*

1. Trouver un automate fini déterministe reconnaissant les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 1 modulo 3.

2. Donner un automate fini déterministe qui reconnaisse l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.

Exercice 2 *Langages rationnels*

Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$.
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$.
3. $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$.
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
5. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b.
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
7. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$.
8. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$.
9. $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$.
10. $\{a^i b^j, i \geq j\}$.

Exercice 3 *Mots de Lyndon (aaaaaaargh...)*

Soit Σ un alphabet ayant au moins deux lettres. Deux mots u et v sur Σ sont dits conjugués s'il existe des mots s et t sur Σ tels que $u = st$ et $v = ts$. Ils sont conjugués propres lorsque ni s ni t ne sont vides.

1. Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ définie sur Σ^* par $u\ \mathcal{R}\ v$ si u et v sont conjugués est une relation d'équivalence.

On suppose que Σ est totalement ordonné par une relation $\leq$.
On munit Σ^* de l'ordre total lexicographique en posant $u \leq v$ si l'une des clauses suivantes est satisfaite :
– u est un préfixe de v ;
– $u = xay$, $v = xbz$ avec $a, b \in \Sigma$, $a < b$ et $x, y, z \in \Sigma^*$.

2. Soient $u, v \in \Sigma^*$, tels que $u < v$ et u n'est pas un préfixe de v. Montrer que

$$\forall w, z \in \Sigma^*, uw < vz.$$

3. Soit $u \in \Sigma^+$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i). u est un mot primitif et il est le plus petit de sa classe de conjugués.

(ii). u est strictement inférieur à chacun de ses conjugués propres.

(iii). u est strictement inférieur à chacun de ses suffixes propres.

Un mot satisfaisant l'une de ces propriétés est appelé mot de Lyndon. On note L l'ensemble des mots de Lyndon sur Σ.

4. Soient u et v deux mots de Lyndon , montrer que si $u < v$ alors uv est aussi un mot de Lyndon.

5. Soit $w \in L - \Sigma$, si $w = uv$ où v est le plus long suffixe de w appartenant à L, prouver que $u \in L$.

6. Montrer que tout mot de Σ^+ s'écrit de manière unique sous la forme $u = u_1 u_2 \dots u_n$ où les u_i sont dans L et $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$.

7. Soit $u = u_1 u_2 \dots u_n$ la factorisation de $u \in \Sigma^+$ comme produit décroissant de mots de Lyndon, prouver que u_n est le plus petit suffixe de u pour l'ordre lexicographique.