TD4. Complexité de Kolmogorov

Dans tout le TD, les mots considérés sont formés sur un alphabet à deux lettres. Rappelons une définition possible de la complexité de Kolmogorov :
Si U est un algorithme prenant en entrée des mots et renvoyant d'autres mots, la complexité de calcul de x par U est $K_U(x) = \min\{|y| \mid U(y) = x\}$. On dit alors qu'un algorithme U n'est pas plus mauvais qu'un autre algorithme V si il existe une constante $C_{U,V}$ telle que pour tout mot x, $K_U(x) \leq K_V(x) + C_{U,V}$. Il se trouve qu'il existe un algorithme U_{opt} qui n'est plus mauvais qu'aucun autre algorithme[1], et alors on notera $K = K_{U_{opt}}$. La complexité de Kolmogorov est donc ainsi définie à une constante près, mais cela ne devrait pas poser problème.

Exercice 1 *Propriétés de base*

Montrer les propriétés suivantes

1. $\exists C, \forall x, K(x) \leq |x| + C$

2. Il existe c tel que

$$2^{n-c} \leq \#\{x \mid K(x) \leq n\} \leq 2^{n+1}$$

3. Pour toute fonction calculable α, il existe C_α tel que pour tout x, $K(\alpha(x)) \leq K(x) + C_\alpha$

4. $\exists C, \forall x, y,$

$$K(x.y) \leq K(x) + K(y) + \log(K(x)) + 2\log(\log(K(x)) + C$$

5. Il existe c tel que pour tout n, 99% des mots de longueur n ont une complexité comprise entre $n - c$ et $n + c$

Exercice 2 *Théorème d'incomplétude de Chaitin*

1. Montrer que la fonction K tend vers l'infini.

2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction calculable non bornée qui soit majorée par K.

Soit T une théorie cohérente permettant de modéliser le fonctionnement des machines de Turing. On suppose que T est récursivement énumérable.

3. Montrer qu'il existe un entier c_T tel que tous les théorèmes de T de la forme "la complexité de Kolmogorov de x est supérieure à n" vérifient $n \leq c_T$.

Exercice 3 *Un peu de récursivité*

On donne, pour chaque n, un ensemble de mots V_n de taille au plus 2^n et l'on suppose que la relation $\{(x, n) \mid x \in V_n\}$ est récursivement énumérable.

1. Montrer que les éléments de V_n ont une complexité au plus $n + O(1)$.

Exercice 4 *Keep it simple !*

1. Montrer que l'ensemble $B = \{x \mid K(x) \leq \log(|x|)\}$ est simple (RE, de complémentaire infini et qui rencontre tout ensemble RE infini).

[1] Considérons la preuve de ce fait comme l'exercice 0 de cette feuille.

Exercice 5 *Recursively Evil*

1. Montrer que la suite caractéristique χ d'un ensemble RE vérifie

$$\exists c \forall n, \quad K(\chi_{1:n}) \leq 2\log n + c$$

2. Montrer qu'il existe un ensemble RE dont la suite caractéristique χ vérifie

$$\forall n, \quad K(\chi_{1:n}) \geq \log n$$

3. Montrer que pour tout m, il existe un mot x tel que pour presque tout y (tous sauf un nombre fini) on ait

$$K(x) - K(x|y) \geq m$$

(informellement, cela signifie que presque tous les mots contiennent beaucoup (plus que m) d'information sur x)

Exercice 6 *Euclide vs. Kolmogorov*

1. Montrer qu'il existe une constante c telle que,

$$\forall a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}, \quad K(\prod a_i^{b_i}) \leq 2\sum K(a_i) + 2\sum K(b_i) + c$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.