Partiel – mercredi 25 octobre (durée 2h)

Les résultats vus en cours ou en TD peuvent être utilisés sans être redémontrés.
Exercice 1.

✎ Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, dire s'il est rationnel ou non en justifiant vos réponses.
- $L_1 = \{a^{31n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{uu \mid u \in \Sigma^*\}$
- $L_3 = \{uv \mid u$ est un préfixe non vide de $v\}$
- $L_4 =$ l'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs et qui ont un nombre pair de b
- $L_5 = \{a^i \mid$ le chiffre 7 apparaît i fois consécutives dans le développement de π en base $10\}$
- $L_6 = \{a^i \mid \exists n \in \mathbb{N}, i = n^2\}$
- $L_7 = L_6^4 = \{uvwx \mid u, v, w, x \in L_6\}$

Exercice 2.

1. Soit $L \subseteq \{a\}^*$ un langage quelconque (pas nécessairement rationnel). Montrer que L^* est rationnel.

2. Qu'en est-il sur un alphabet à deux lettres ?

Exercice 3.
Soit $L \subseteq \{a, b\}^*$ un langage.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?

2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?

Exercice 4. *Stabilité par morphismes*
Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) \mid u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
(i) $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle b^*ab^*.

2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. On pourra raisonner par induction sur une expression rationnelle.

3. Qu'en est-il de la réciproque de la question 2 ?

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* \mid h(v) \in L\}$.

4. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
(i) $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j \mid i \geq j\}$.
(ii) $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.

5. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.

6. Qu'en est-il de la réciproque de la question 5 ?

Exercice 5.
Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble d'entiers tel que le langage des écritures en base 3 sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ des éléments de E soit rationnel ($\{(x)_3 \mid x \in E\}$ est rationnel).

✎ Le langage $\{(x)_2 \mid x \in E\}$ des écritures en base 2 sur l'alphabet $\{0, 1\}$ des éléments de E est-il nécessairement rationnel ?