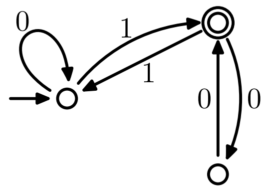
Correction du TD01

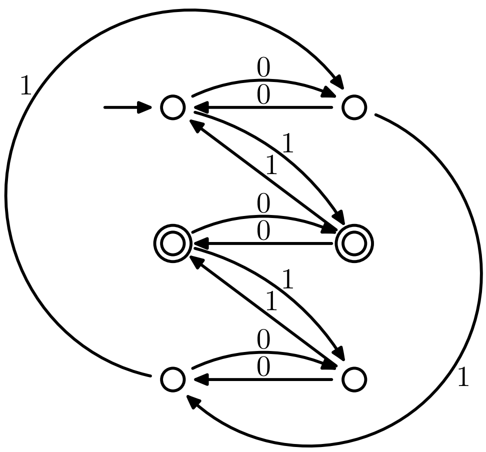
Exercice 1.

1.

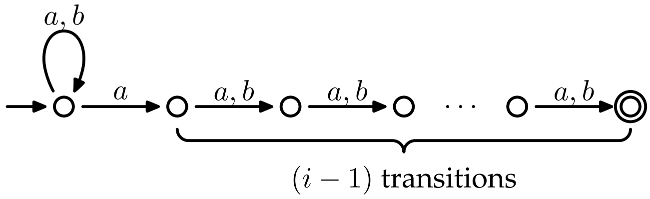
– Si les nombres sont donnés par les bits de poids fort en premier, on construit un automate à 3 états $i \in \{0, 1, 2\}$, un état par congruence ; on passe de l'état i à l'état $2i$ (mod 3) si on lit 0, et de l'état i à l'état $2i + 1$ (mod 3) si on lit 1 :



– Si les nombres sont donnés par les bits de poids faible en premier, on peut soit « retourner » l'automate précédent (les états final et initial sont inversés et toutes les flèches sont retournées) et remarquer qu'il reste déterministe.
Ou bien on construit un automate à 6 états comme suit. Soit $n = \sum_i a_i 2^i$ le nombre en entrée. Alors $n \equiv \sum_j a_{2j} - \sum_j a_{2j+1} \mod 3$. Donc on prend 3 états pour les chiffres de rang pair et 3 autres pour les chiffres de rang impair et on passe de l'un à l'autre comme sur le dessin :

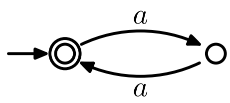


2. Voici un tel automate.

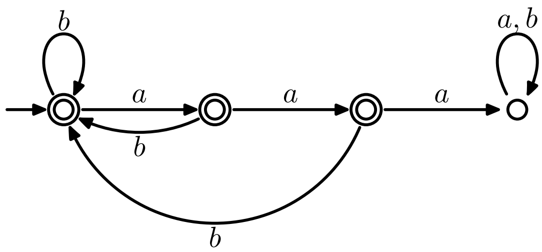


Exercice 2.

1. Ce langage est rationnel : un automate le reconnaissant est



2. Ce langage n'est pas rationnel. En effet, si L était rationnel, il existerait un automate fini le reconnaissant. Soit q_m l'état dans lequel se trouve cet automate après la lecture du mot $a^m b$. Remarquons qu'en lisant a^{m+1} à partir de q_m, on arrive à un état final. Ainsi, pour tout $m' \neq m$, les états q_m et $q_{m'}$ sont différents, sinon en lisant $a^{m'} b a^{m+1}$ on arriverait aussi à un état final. Donc tous les états q_m, pour $m \geq 1$, sont différents, donc l'automate a une infinité d'états, ce qui est une contradiction.
3. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2 : si L était rationnel, il existerait un automate fini le reconnaissant. On appelle Γ_j l'ensemble des entiers m tels que $m + j$ est premier. Alors pour $j \neq j'$, $\Gamma_j \neq \Gamma_{j'}$. On appelle λ_j l'ensemble des états de l'automate auxquels on accède en lisant a^m pour un $m \in \Gamma_j$. Remarquons qu'en lisant a^j à partir d'un état $q \in \lambda_j$ on arrive dans un état final. Puisque pour $j \neq j'$, $\Gamma_j \neq \Gamma_{j'}$, cela implique que pour tous $j \neq j'$, $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$. Cela montre qu'il y a une infinité d'états dans l'automate, une contradiction.
4. Ce langage est rationnel : un automate le reconnaissant est



5. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2.
6. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2.
7. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2.
8. Ce langage *est* rationnel. Il s'agit en effet du langage dont les mots commencent et se terminent par la même lettre.
9. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2.
10. Ce langage n'est pas rationnel, même méthode qu'au 2.

Exercice 3.
Par récurrence sur $n = |u| + |v|$: l'hypothèse au rang n est que si $n = |u| + |v|$ et $uv = vu$ alors u et v sont puissance d'un même mot.
L'hypothèse est vraie au rang $n = 0$ ou $n = 1$ (par convention, un mot élevé à la puissance 0 est le mot vide). Supposons l'hypothèse vraie jusqu'au rang n et montrons l'hypothèse au rang $n + 1$. On peut supposer que $|u| \geq |v| > 0$ (le cas $|v| = 0$ est trivial). Puisque $uv = vu$, il existe un mot w, préfixe de u, tel que $uv = vwv$. De plus, $u = wv$ (faire un dessin si ce n'est

pas clair). Ainsi, $u = vw = wv$ donc v et w commutent. Par l'hypothèse de récurrence au rang $|v|+|w| = |u| \leq n$, il existe un mot x tel que $v = x^k$ et $w = x^{k'}$. Cela permet de conclure puisque $u = vw$ est aussi une puissance de x (à savoir $u = x^{k+k'}$).

Exercice 4.

1. En prenant $v = a^m b a^m \bar{u}$ avec m strictement plus grand que N, le max de tous les $|u_i|$ et de $|u|$, on voit que le milieu du mot $u_i v$ se trouve à distance au plus $N/2$ du b « central ». Si b est précisément ce milieu, alors $u_i v$ n'est pas un palindrome car $u \neq u_i$; sinon, l'image de b par symétrie centrale se trouve dans un bloc de a, donc $u_i v$ n'est pas non plus un palindrome.

2. Prenons comme famille (u_i) tous les mots différents de u. Alors pour chaque v tel que uv est un palindrome, il existe un i tel que $u_i v$ est aussi un palindrome (prendre $u_i = \bar{v}$ si $u \neq \bar{v}$, et $u_i = \bar{v}a$ sinon). Donc la propriété est fausse dans le cas d'une famille infinie.

Exercice 5.
Si u commence par la lettre x, il suffit de prendre $v = xy^{|u|}$ où y est une lettre différente de x. En effet, si w est un bord, deux cas se présentent : soit $|w| \leq |u|$ et dans ce cas, il n'est composé que de lettres y, ce qui contredit le fait que u commence par x ; soit $|w| > |u|$ et dans ce cas, w se termine par une lettre x suivie de $|w| - |u| - 1$ lettres y, ce qui n'est pas compatible avec v.