TD10 – L'ordre qui ne tait rien

Exercice 1. *Terminaison*

1. Soit $\Sigma = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Montrer que le système de récriture défini sur $\Sigma^\star$ par la règle $u(i+1)v \longrightarrow uiiv$ termine.

2. Soit la définition suivante de la fonction d'Ackermann :

$$Ack(0, n) = n + 1$$

$$Ack(m + 1, 0) = Ack(m, 1)$$

$$Ack(m + 1, n + 1) = Ack(m, Ack(m + 1, n)).$$

Montrer que l'évaluation de $Ack(m, n)$ termine pour tous m, n.

3. Montrer que le système de récriture suivant est nœthérien :

$$\neg\neg x \longrightarrow x$$

$$\neg(x \wedge y) \longrightarrow (\neg\neg\neg x) \vee (\neg\neg\neg y)$$

$$\neg(x \vee y) \longrightarrow (\neg\neg\neg x) \wedge (\neg\neg\neg y)$$

Exercice 2. *Lemme de König*

✎ Montrer qu'un arbre infini à branchement fini admet un chemin infini.

Exercice 3. *Lemme de Higman*

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur $\Sigma^\star$ la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme de Higman – Soit (x_i) une suite infinie de $\Sigma^\star$. Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.

Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Pour la preuve, on suppose qu'il existe une suite mauvaise. On construit une suite (x_i) de la façon suivante :

- x_0 est un élément minimal qui commence une mauvaise suite ;
- x_i est un élément minimal à la position i d'une mauvaise suite qui commence par $x_0, \ldots, x_{i-1}$.

1. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par la même lettre $a \in \Sigma$. On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = ax'_{\phi(i)}$.

2. Montrer que la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, x'_{\phi(2)}, \ldots$ est bonne et conclure.