TD11 – Justice League of Réécriture : Hig-Man, New-Man et les autres

Exercice 1.

Hig-Man, le super-héros qui a trop bu

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur $\Sigma^\star$ la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme de Higman – Soit (x_i) une suite infinie de $\Sigma^\star$. Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.

Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Pour la preuve, on suppose qu'il existe une suite mauvaise. On construit une suite (x_i) de la façon suivante :
– x_0 est un élément minimal qui commence une mauvaise suite ;
– x_i est un élément minimal à la position i d'une mauvaise suite qui commence par $x_0, \ldots, x_{i-1}$.

1. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par la même lettre $a \in \Sigma$. On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = ax'_{\phi(i)}$.

2. Conclure en raisonnant sur la suite

$$x_0, x_1, \ldots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, x'_{\phi(2)}, \ldots$$

Exercice 2.

New-Man, le super-héros nouveau est arrivé

1. Quelle hypothèse est nécessaire sur la relation d'ordre $<$ pour que le schéma d'induction

$$[\forall x\, (\forall y, y < x \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow \forall x, P(x)$$

soit valide ?

2. En utilisant le schéma d'induction de la question précédente montrer qu'une relation nœthérienne localement confluente est confluente (lemme de Newman).

3. Montrer qu'il est nécessaire de supposer que la relation est nœthérienne pour obtenir la confluence.

Soit A un ensemble muni d'un ordre nœthérien $<$ contenant une relation $\xrightarrow{R}$.
Soient u et v deux termes. Soit une suite $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$. On dit que $(w_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une *preuve par réécriture* de $u \overset{R}{\longleftrightarrow}{}^{*}\, v$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

i. $u = w_0$ et $v = w_n$

ii. $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $w_i \xleftarrow{R} w_{i+1}$ ou $w_i \xrightarrow{R} w_{i+1}$

iii. $\exists i \in [\![0, n]\!]$, $w_0 \xrightarrow{R} w_1 \xrightarrow{R} \ldots \xrightarrow{R} w_{i-1} \xrightarrow{R} w_i \xleftarrow{R} w_{i+1} \xleftarrow{R} \ldots \xleftarrow{R} w_{n-1} \xleftarrow{R} w_n$

Si elle ne vérifie que les propriétés i. et ii. on dit simplement que c'est une *preuve* de $u \overset{R}{\longleftrightarrow}{}^{*}\, v$.
On dit que $\xrightarrow{R}$ est *W-confluente* si pour tous $a, b, c \in A$ avec $b \xleftarrow{R} a \xrightarrow{R} c$ il existe une preuve $(d_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $b \overset{R}{\longleftrightarrow}{}^{*}\, c$ telle que $\forall i \in [\![0, n]\!], a > d_i$.

4. Montrer que si $\xrightarrow{R}$ est localement confluente elle est W-confluente.

5. Montrer que si $\xrightarrow{R}$ est W-confluente alors pour toute preuve π de $b \xleftrightarrow{R}^{*} c$ qui n'est pas une preuve par réécriture il existe une preuve π' de $b \xleftrightarrow{R}^{*} c$ telle que $\pi \gg \pi'$ (on définira $\gg$ à partir de $>$ comme un ordre nœthérien).

6. Rappeler la propriété de Church-Rosser pour $\xrightarrow{R}$.

7. Montrer que si $\xrightarrow{R}$ est W-confluente alors elle satisfait la propriété de Church-Rosser.

Exercice 3. *Le jeu de Nim (ou Marienbad pour les cinéphiles)*

Le jeu de Nim (dans sa version étendue en deux dimensions) est un jeu à deux joueurs qui se joue sur la grille $\mathbb{N}^2$ (donc un quart de plan discret).
Au départ chaque case contient un jeton. À tour de rôle les joueurs choisissent un jeton présent sur la grille et enlèvent tous les jetons qui se trouvent au-dessus et à droite de ce point (donc si ils jouent en (x, y) on enlève de la configuration tous les jetons (x', y') tels que $x' \geq x$ et $y' \geq y$).
Le joueur qui prend le dernier jeton (en $(0, 0)$) perd.

Montrer que le jeu de Nim termine.

2. Donner une stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

Exercice 4. *Ça peut pas être bien dûr...*

Le système de réécriture suivant sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ termine-t-il ?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aa & \rightarrow & bc \\ bb & \rightarrow & ac \\ cc & \rightarrow & ab \end{array} \right.$$