TD 3 - Minimisation et résiduels

Exercice 1. *Plus c'est petit, plus c'est joli !*

Définition (Congruence de Nérode)**.** Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. La congruence $\sim$ suivante, vue en cours, s'appelle la congruence de Nérode :

$$q \sim q' \quad \text{ssi} \quad \forall u \in \Sigma^* \; \delta(q,u) \in F \Leftrightarrow \delta(q',u) \in F$$

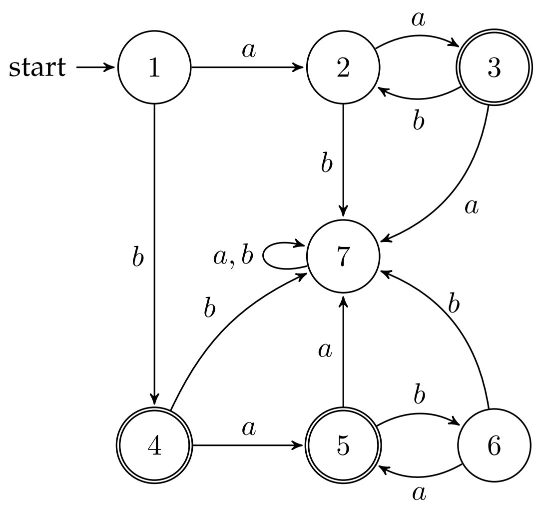
Définition (Algorithme de Moore)**.** Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. On définit $\sim_i$ sur Q par :

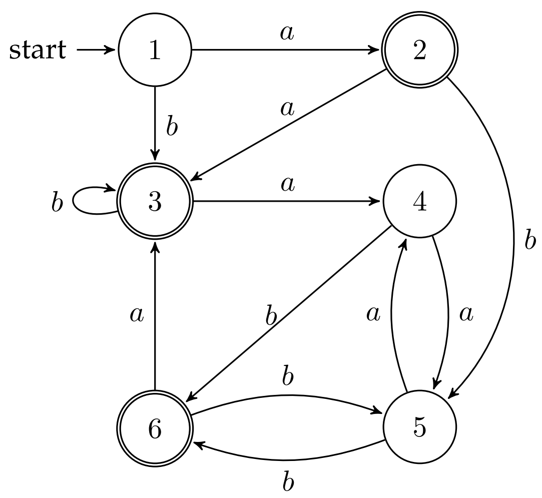
$$q \sim_0 q' \quad \text{ssi} \quad (q, q' \in F \text{ ou } q, q' \notin F)$$
$$q \sim_{i+1} q' \quad \text{ssi} \quad q \sim_i q' \text{ et } \forall a \in \Sigma, \delta(q,a) \sim_i \delta(q',a)$$

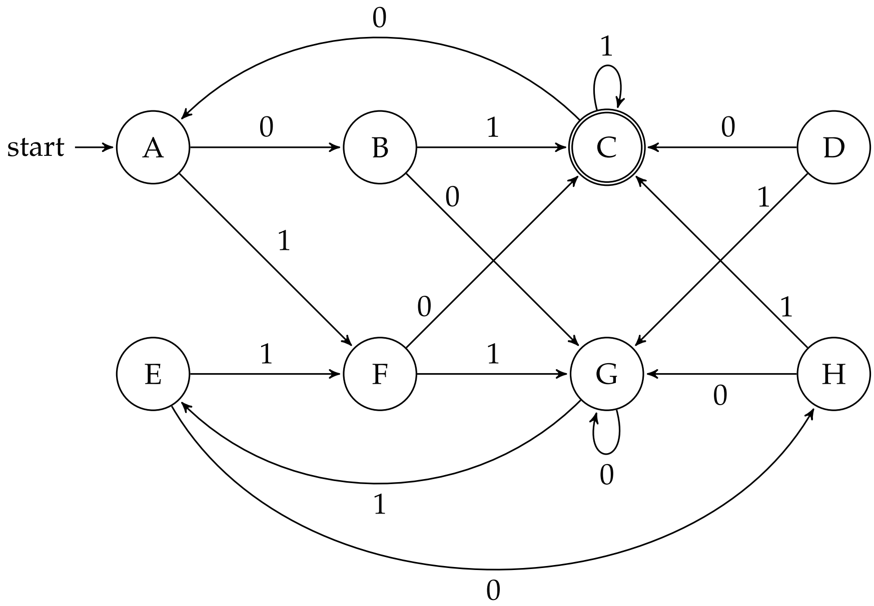
pour tous états q, q' de Q et pour tout $i \geq 0$.

On peut montrer qu'il existe k tel que $\sim_k = \sim_{k+1} = \sim$. En d'autres termes, l'algorithme de Moore, qui est un algorithme de raffinement de partition, termine et renvoie la congruence de Nérode. (Ce n'est pas très difficile mais ce n'est pas l'objet de cet exercice.) Il permet donc de calculer un automate minimal reconnaissant L en fusionnant les états qui sont dans la même classe de congruence.

1. Exécuter l'algorithme de Moore sur les automates suivants et donner l'automate minimal correspondant :







Exercice 2. *Attention à l'explosion*

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\Sigma = \{0, 1\}$. On définit le langage L sur Σ comme le langage des mots ayant un 1 en i^{e} position avant la fin. Par exemple si $i = 2$ alors $0010 \in L$ mais $1100 \notin L$.

1. Donner un automate non déterministe avec $i + 1$ états reconnaissant L.
2. Soit w un mot de Σ avec $i-1$ lettres. Calculer le langage résiduel $w^{-1}L = \{v \in \Sigma^* | wv \in L\}$.
3. En déduire une borne sur le nombre d'états de n'importe quel automate déterministe reconnaissant L. La comparer avec le nombre d'états dans la question 1.

Exercice 3. *Ne suivez pas l'étoile du berger...*

On définit le langage suivant : $L = \{uu^R v | u, v \in \Sigma \setminus \{\varepsilon\}\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, où u^R désigne le miroir de u : si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ alors $u^R = u_n u_{n-1} \dots u_1$.

1. Montrer que L vérifie le lemme de l'étoile pour la borne $M = 4$.
2. Montrer que L n'est pas rationnel.
3. En déduire qu'il faut se méfier du lemme de l'étoile.

Exercice 4. *Vous n'aurez droit qu'aux restes*

On définit sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ le langage L composé de tous les mots non vides qui contiennent soit un seul b, soit un nombre pair de b. Calculez tous les langages résiduels de L, puis en déduire l'automate minimal qui reconnaît L.