
TD 7 – Machines de Turing

Exercice 1.*Caisse à outils*

Trouvez vous-même un tas d’outils très utiles !

1. Donner une bijection b de $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.
2. Donner une bijection de \mathbb{N}^3 dans \mathbb{N} , de \mathbb{N}^4 dans \mathbb{N} ...
3. Donner une bijection ζ de \mathbb{N}^* (l’ensemble des suites finies d’entiers) dans \mathbb{N} . Note : On pourra se baser sur le fait que tout entier naturel $n \notin \{0, 1\}$ a une décomposition en produit de facteurs premiers.
4. Prouvez qu’il n’existe pas de bijection entre l’ensemble $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de $\{0, 1\}$ et \mathbb{N} . En déduire qu’il n’existe pas de bijection entre \mathbb{R} et \mathbb{N} .

Exercice 2.*Vers l’infini et au-delà !*

Pour s’échauffer :

1. Construire une machine de Turing M qui écrit $0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \dots$ sur un ruban blanc.
Pour ceux qui douteraient de l’intérêt de cette question, s’adresser à A. Turing.

Passons aux choses sérieuses :

On définit un nouveau modèle de machine de Turing fonctionnant avec un ruban infini *des deux côtés*, c’est à dire qu’à l’état initial l’entrée est écrite quelque part sur le ruban, et il n’y a que des blancs partout ailleurs sur le ruban infini. (Formellement, on peut dire que les cases du ruban sont indexées par \mathbb{Z} au lieu d’être indexées par \mathbb{N} pour un ruban classique, infini à droite).

2. Donner l’intuition pour qu’une telle machine de Turing avec ruban infini des deux côtés peut être simulée par une machine de Turing avec ruban infini à droite, et vice versa.

Exercice 3.*Je te lis ♪ tu me lis ♪ ...*

Construisez les machines de Turing suivantes :

1. M à un ruban sur l’alphabet $\{0, 1, _ \}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.
2. M à un ruban sur l’alphabet $\{0, 1, _ \}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.
3. M à un ruban sur l’alphabet $\{0, 1, _ \}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.
4. M qui accepte $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.
5. M qui code en binaire son entrée unaire.

Exercice 4.*Ou tu veux ou tu veux pas.*

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^* . Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^{-1} (x écrit à l’envers)
2. la machine accepte x ssi x s’écrit yy^{-1} pour un certain $y \in \Sigma^*$.

3. la machine accepte x ssi x s'écrit yy pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 5.

L'école primaire d'Alan

Construire une machine de Turing qui effectue :

1. L'addition de deux entiers.
2. La multiplication de deux entiers.
3. La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.