

## **CALCUL DE LAMBEK ET LOGIQUE LINÉAIRE**

**Christian RETORÉ\***

### **Résumé - Abstract**

Cet article est une présentation de la logique linéaire, qui est introduite comme une extension du calcul de Lambek. Sans présupposer de connaissances particulières, nous exposons en détail les relations entre ces deux systèmes, notamment à travers l'étude des réseaux de démonstration, que nous définissons. Il semble en effet que la logique linéaire, et plus particulièrement les réseaux de démonstration, soient une structure remarquablement riche où décrire la syntaxe des langues, comme en témoignent nombre de travaux récents.

We introduce linear logic as an extension of the Lambek calculus. Although this article is almost self-contained, we thoroughly study the relations between these two systems, in particular via the proof net notion, which we define. Indeed, it seems that linear logic, and especially the theory of proof nets, is a powerful structure for describing the syntax of natural languages, as may be seen from many recent publications.

### **Mots Clefs - Keywords**

Grammaires catégorielles, logique linéaire, calcul de Lambek.

Categorical grammar, linear logic, Lambek calculus.

---

\*. *Projet Calligramme, INRIA-Lorraine & CRIN-C.N.R.S.*  
B.P. 101 615, rue du jardin botanique 54602 Villers-lès-Nancy cedex  
E-Mail: [retore@loria.fr](mailto:retore@loria.fr) WWW: <http://www.loria.fr/~retore/index.html>

## INTRODUCTION

Cet article est une introduction à la logique linéaire qui se fonde sur le fait suivant que nous établirons : le calcul de Lambek, bien connu des informaticiens linguistes, est un fragment d'une variante non commutative de la logique linéaire. Il s'agit donc d'un complément le plus explicite possible à la présentation générale de la logique linéaire donnée par A. Lecomte dans l'introduction de ce numéro.

L'intérêt linguistique du calcul de Lambek n'est plus à justifier : il permet d'exprimer une grammaire catégorielle comme un calcul purement logique, exempt de règles ad hoc. D'importantes propriétés logiques en résultent : l'élimination des coupures, la propriété de la sous-formule, l'existence de sémantiques algébriques complètes et de sémantiques dénotationnelles. Ce sont là autant d'outils que peut utiliser l'analyse syntaxique qui, dans ce cadre, est ramenée à la démonstration automatique d'un énoncé. Mais ces propriétés logiques du calcul de Lambek sont également utiles à l'interprétation sémantique d'un énoncé. En effet, une représentation sémantique à la Montague, c'est un lambda terme, ce qui est également une représentation d'une démonstration : ainsi syntaxe et sémantique sont-elles décrites par des structures similaires.

Les limites linguistiques du calcul de Lambek sont essentiellement liées à sa capacité générative limitée. Comme cela avait été conjecturé (Chomsky N. 1963:p. 413), le calcul de Lambek n'engendre que des langages algébriques (Pentus M. 1993), et par conséquent, ne peut décrire de dépendances croisées. Nombre d'autres phénomènes, tels les constituants discontinus et les extractions lui échappent également. Cette limitation suggère d'étendre le calcul de Lambek, c'est-à-dire d'augmenter la classe des constructions linguistiques dont il peut rendre compte, sans rien perdre, si possible, des qualités logiques de ce système.

La logique linéaire est précisément une extension du calcul de Lambek qui bénéficie des mêmes atouts logiques. De plus, en raison de ses connecteurs très élémentaires et de son morcellement des règles structurelles, elle admet de nombreuses variantes, notamment non commutatives. La logique linéaire est donc une possibilité d'extension que les grammaires catégorielles *doivent* envisager.

Un des concepts clefs qu'a introduit la logique linéaire est celui de *réseau de démonstration*. Ce formalisme, que nous présentons ici, permet de décrire les démonstrations comme des graphes. Nous nous intéresserons en particulier aux réseaux de démonstration du calcul de Lambek, que nous caractérisons. Cette nouvelle vision des démonstrations du calcul de Lambek, c'est-à-dire des analyses syntaxiques dans une grammaire catégorielle, est riche de conséquences linguistiques, comme en témoignent les exemples suivants :<sup>1</sup>

– Dans le calcul de Lambek présenté traditionnellement, c'est-à-dire par

---

1. Encore ces exemples ne concernent-ils que le calcul de Lambek stricto sensu, tandis que d'autres variantes de la logique linéaire, développées dans le cadre des réseaux, présentent aussi un intérêt linguistique (Lecomte A. & Retoré C. 1995; Schena I. 1996; Abrusci V. M. 1995)....

un calcul des séquents, des analyses syntaxiques correspondant à la même structure syntaxique sont malheureusement distinctes. Comme nous le montrons ici, l'utilisation des réseaux de démonstration, en identifiant les démonstrations inessentiellement différentes, évite ce problème des « *ambiguïtés fallacieuses* » (*spurious ambiguities*).

- Le calcul de la sémantique de Montague d'un énoncé à partir de son analyse syntaxique et de la sémantique des mots le constituant est quasi immédiat lorsque syntaxe et sémantique sont décrites par des réseaux de démonstration (de Groote Ph. & Retoré C. 1996).
- Symétriquement, la génération automatique d'un énoncé dont la sémantique de Montague est connue se ramène à la construction d'un réseau étiqueté par des lambda termes, en suivant les indications fournies par la sémantique de Montague (Merenciano J. M. 1996).
- La reconstruction de tous les parenthésages phonologiques à partir de l'analyse syntaxique et de données exprimées dans l'algèbre phonologique de M. Moortgat découle du lemme d'interpolation pour les réseaux de démonstration (Bechet D. & de Groote Ph. 1996).
- Les analyseurs syntaxiques des grammaires hors contexte ne permettent pas de mesurer la complexité instantanée d'un énoncé comportant des relatives imbriquées. L'analyse syntaxique exprimée par un réseau de démonstration le permet: la mesure est un couple d'entiers qui se déduisent du réseau (Johnson M. E. 1996).
- C'est grâce aux réseaux, qui ont une structure très proche des arbres, qu'une représentation des grammaires d'arbres adjoints (TAG) dans le calcul de Lambek a été découverte (Abrusci V. M. *et al.* 1996).

Ces raisons justifient une présentation précise, rigoureuse et destinée aux linguistes de la logique linéaire et des réseaux de démonstration. Pour ce faire, en ne supposant qu'une certaine familiarité avec les grammaires catégorielles, nous avons ici rassemblé et parfois complété des résultats épars et exprimés dans des formalismes très variés. Cela est d'autant plus utile que — pour l'instant ? — les variantes non commutatives de la logique linéaire, c'est-à-dire celles qui présentent un intérêt grammatical, ne sont pas un thème majeur dans les articles d'introduction à la logique linéaire. En ce qui concerne la logique linéaire, introduite par (Girard J.-Y. 1987), on pourra consulter (Troelstra A. S. 1992) et (Girard J.-Y. 1995). Pour le calcul de Lambek, les articles originaux (Lambek J. 1958; Lambek J. 1961) sont tout à fait lisibles, et les applications linguistiques sont très bien décrites dans (Moortgat M. 1988; Moortgat M. 1990; Lecomte A. 1994; Morrill G. 1994; Moortgat M. 1996).

Cet article contient le strict minimum pour présenter rigoureusement la logique linéaire comme une extension du calcul de Lambek, et l'analyse syntaxique d'un énoncé dans une grammaire de Lambek comme la construction d'un réseau de démonstration. En particulier nous ne traitons que de calculs *sans coupure*, puisque cela suffit pour l'analyse syntaxique.<sup>2</sup> La section 1 rap-

2. De plus, cela eut un peu compliqué la caractérisation des réseaux de Lambek en termes de bon parenthésage donnée dans l'avant-dernière section.

pelle ce qu'est un calcul des séquents, de la manière la plus explicite possible.<sup>3</sup> La section 2 présente le langage de la logique linéaire à partir de celui du calcul de Lambek et étudie leur relation. La notion centrale est celle de polarité, qui est difficile à attribuer: (Roorda D. 1991; van de Wiele J. 1990; Danos V. 1990; Lamarche F. 1994; Fleury A. 1996). Pour ce qui nous concerne ici, les premiers résultats sont vraisemblablement (van de Wiele J. 1990), qui sont en partie repris dans (Bellin G. & Scott P. J. 1994:pp. 37–43). Les sections 3, 4 et 5 présentent le calcul des séquents bilatère de la logique linéaire, le calcul de Lambek comme un fragment de ce dernier et, finalement, un calcul linéaire unilatère très réduit, mais en fait équivalent au calcul bilatère. La section 6 montre le lien entre, d'une part le calcul unilatère et sa variante cyclique (Yetter D. N. 1990), et, d'autre part, le calcul de Lambek et ses variantes (van Benthem J. 1991). Ces résultats sont tous plus ou moins connus, via la notion de polarité. La section 7 est consacrée aux réseaux de démonstration (Girard J.-Y. 1987), qu'on présente à l'aide de graphes bicolores (Retoré C. 1996). Cette section présente notamment la caractérisation des réseaux du calcul de Lambek avec séquence vide en termes de bon parenthésage (certainement connue de Roorda D., mais non publiée)<sup>4</sup> et celle, nouvelle mais toute simple, des réseaux du calcul de Lambek *sans la séquence vide* — cette restriction est pourtant essentielle pour l'analyse syntaxique, comme nous l'expliquons. Nous concluons en montrant sur un exemple comment procède l'analyse syntaxique dans les réseaux de démonstration du calcul de Lambek sans la séquence vide.

Je remercie A. Abeillé, Ph. de Groote, A. Lecomte, J.-Y. Marion, G. Perrier et les rapporteurs de leurs commentaires — sans oublier D. Roegel dont les compétences en  $\text{\LaTeX}$  m'ont été *très* utiles.

## 1. QUELQUES REMARQUES SUR LE CALCUL DES SÉQUENTS

Les calculs des séquents sont des systèmes de déduction logique introduits par (Gentzen G. 1934), et qui permettent de nombreuses variations. Ce sont des systèmes à trois niveaux: celui des formules, celui des séquents, et celui des démonstrations.

### 1.1. Les formules

Un langage (logique) est un ensemble de formules formées à partir de symboles propositionnels notés par des minuscules grecques  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  et éventuellement des symboles  $n, sn, P$ , au moyen de connecteurs tels la négation (notée  $\perp$ ), la conjonction (notée  $\otimes$ ), la disjonction (notée  $\wp$ ), les implications (notées  $A \setminus B$  et  $B / A$ ). On notera  $\mathcal{P}$  la collection des symboles propositionnels.

---

3. Pour plus de détails sur ce sujet, on consultera par exemple (Girard J.-Y. *et al.* 1988).

4. (Roorda D. 1991) montre cette propriété mais pas sa suffisance, alors que tout le nécessaire y est. Cette caractérisation est également présente, dans un formalisme plus algébrique dans (Fleury A. 1996). Finalement, il existe depuis peu une caractérisation équivalente exclusivement basée sur la notion de graphe bicolore, obtenue en en orientant les arêtes, ce qui permet en outre un traitement très élégant du calcul avec coupures (Maringelli E. 1996).

L'égalité entre formules est l'égalité entre chaîne de caractères; on distinguera, par exemple,  $(A \otimes B) \otimes C$  de  $A \otimes (B \otimes C)$ , même si la logique considérée permet de démontrer l'associativité de  $\otimes$ .

## 1.2. Les séquents

Rappelons les conventions typographiques de ce genre de systèmes : les majuscules romaines  $A, B, C, F, H, \dots$  désignent des formules, et les majuscules grecques  $\Gamma, \Delta, \Theta, \dots$  des suites finies de formules, possiblement vides.

Un séquent<sup>5</sup> est une expression de la forme  $\Gamma \vdash \Delta$  dont la signification intuitive est : « de la conjonction des formules de  $\Gamma$  se déduit la disjonction des formules de  $\Delta$  ». Lorsque  $\Gamma$  est vide ce séquent s'écrit  $\vdash \Delta$  et se comprend comme la disjonction des formules de  $\Delta$ , puisque l'élément neutre de la conjonction est « vrai ». En particulier, le séquent  $\vdash F$  où  $F$  est une formule se comprend comme la formule  $F$ .

## 1.3. Les démonstrations

Les démonstrations sont régies par un calcul, dit des séquents, qui définit inductivement les démonstrations. Ce sont des arbres de séquents, dont les feuilles sont soit des séquents particuliers appelés hypothèses, soit des instances des axiomes et dont les branchements sont des instances des règles. Une instance d'un axiome ou d'une règle est tout simplement un axiome ou une règle dans lesquels les variables de formules ou de suites de formules ont été remplacées par des formules particulières du langage ou des suites particulières de formules du langage.

- Les règles (généralement unaires ou binaires) sont notées :

$$\frac{\text{(prémisse :)} \Gamma \vdash \Gamma'}{\text{(conclusion :)} \Theta \vdash \Theta'} \text{ nom-de-la-règle} \quad \frac{\text{(prémises :)} \Gamma \vdash \Gamma' \quad \Delta \vdash \Delta'}{\text{(conclusion :)} \Theta \vdash \Theta'} \text{ nom-de-la-règle}$$

- Les axiomes (qui peuvent se voir comme des règles zéro-aires) sont surlignés d'un trait portant le nom de l'axiome utilisé :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Gamma'} \text{ nom-de-l'axiome}$$

- Les hypothèses sont simplement des séquents particuliers.
- la racine est appelé le séquent conclusion :

$$\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \Gamma'} \text{ nom-de-la-dernière-règle-utilisée}$$

Une démonstration se comprend ainsi : « des séquents hypothèses on déduit le séquent conclusion ». Lorsqu'un séquent  $s$  admet une démonstration sans hypothèse dans un calcul des séquent CS, on dit que  $s$  est démontrable dans CS, ce que l'on notera  $s \in \text{CS}$ . En particulier, une tautologie est une formule  $F$  telle que  $(\vdash F) \in \text{CS}$ .

5. On devrait plutôt dire une séquence, mais le mot est passé dans l'usage.

### 1.3.1. Règles dérivables

Étant donné un calcul des séquents CS, une règle de prémisses  $s_1^* \dots s_k^*$  et de conclusion  $s^*$  — où  $s^*, s_1^* \dots s_k^*$  sont des séquents comportant des variables de formules et des variables de suites de formules —, est dite dérivable si et seulement s'il existe une démonstration comportant des variables de formules et de suites de formules qui n'utilise que les règles et axiomes de CS et qui a pour seules hypothèses  $s_1^* \dots s_k^*$  et pour conclusion  $s^*$ .

Il est alors clair qu'un séquent est démontrable dans le calcul enrichi de la règle dérivable si et seulement s'il l'est dans le calcul originel : étant donnée une démonstration du calcul enrichi, il suffit de remplacer toute application de la règle dérivable par une instance adéquate de la démonstration correspondante.

## 2. LANGAGES CATÉGORIEL ET LINÉAIRE

### 2.1. Le langage linéaire vu comme une extension du langage catégoriel

Le langage usuel des grammaires catégorielles est celui du calcul de Lambek :

$$\mathcal{L} ::= \mathcal{P} \mid \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \mid \mathcal{L} / \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}$$

Comme on le sait, le produit du calcul de Lambek se comporte comme une conjonction, et les deux symboles  $\setminus$  et  $/$  comme des implications. Dans les présentations usuelles du calcul de Lambek, le produit est plutôt noté par un point «  $\cdot$  » ou «  $\bullet$  » ; j'utilise ici la notation «  $\otimes$  » (*fois*), qui est celle de la logique linéaire. J'ai par contre préféré le symbole «  $\setminus$  » (*implique* ou *slash*) et le symbole «  $/$  » (*est impliqué par* ou *backslash*) à leurs notations en logique linéaire, respectivement «  $-o$  » et «  $o-$  ».

La logique linéaire multiplicative est un calcul « classique » qui étend le calcul de Lambek par une négation notée  $(\dots)^\perp$  (*l'orthogonal de ...*) et les symétries qu'elle induit.<sup>6</sup> Par l'expression « symétries induites par la négation » nous entendons les familières lois de De Morgan. En raison de ces lois, en tout point similaires à celles de la logique classique, à la conjonction  $\otimes$  correspondra une disjonction que l'on notera  $\wp$  (*par*, pour *en parallèle avec*). Par dualité cette disjonction sera associative mais pas commutative, tout comme  $\otimes$ .

Cette disjonction permettra de définir les implications. Ainsi on pourra définir  $A \setminus B$  par  $A^\perp \wp B$  et  $B / A$  par  $B \wp A^\perp$  — tout comme en logique classique on définit  $A \Rightarrow B$  par  $\neg A \vee B$ . On remarquera que c'est la non-commutativité de la disjonction qui permet de distinguer ces deux implications.

Dans le calcul de Lambek  $(C/B)/A \equiv C/(A \otimes B)$  : en effet  $(C/B)/A$  est un type qui, suivi d'un  $A$  puis d'un  $B$  se réduit en  $C$ , et  $C/(A \otimes B)$  est un type qui, suivi d'un  $A$  suivi d'un  $B$ , se réduit en  $C$ , ce qui revient bien au même. Le premier s'écrit, à l'aide de la disjonction (associative)  $C \wp B^\perp \wp A^\perp$  et le second

6. Plus précisément la logique linéaire multiplicative la plus courante étend le calcul de Lambek avec *permutation* : il faut restreindre l'échange aux permutations circulaires pour ne pas identifier  $/$  et  $\setminus$ . Par contre un calcul « classique » sans aucune forme d'échange qui étende le calcul de Lambek nécessite deux négations inverses l'une de l'autre, et est assez délicat à mettre en œuvre (Abrusci V. M. 1991; Abrusci V. M. 1995).

$C\wp(A\otimes B)^\perp$ . On peut donc aisément imaginer que s'il existe une extension classique du calcul de Lambek, alors la négation inverse l'ordre des arguments de la conjonction, et donc, par symétrie, de la disjonction.

La logique linéaire, logique «classique» qui étend le calcul de Lambek a donc pour langage :

$$\mathcal{G} ::= \mathcal{P} \mid \mathcal{G}^\perp \mid \mathcal{G}\wp\mathcal{G} \mid \mathcal{G}\otimes\mathcal{G} \mid \mathcal{G}\backslash\mathcal{G} \mid \mathcal{G}/\mathcal{G}$$

et satisfait les lois de De Morgan suivantes :

$$(A^\perp)^\perp \equiv A \quad (A\wp B)^\perp \equiv B^\perp\otimes A^\perp \quad (A\otimes B)^\perp \equiv B^\perp\wp A^\perp$$

## 2.2. Langage linéaire réduit, et forme standard des formules linéaires

Toute formule  $X$  de  $\mathcal{G}$  admet une unique formule  $+X$  qui lui soit équivalente modulo les lois de De Morgan, et dont les seuls connecteurs binaires soient la conjonction et la disjonction, et qui n'utilise la négation que sur les symboles propositionnels, et au plus une fois puisque deux négations s'annulent.<sup>7</sup> Cette formule s'obtient en remplaçant les implications par leurs définitions, puis en utilisant les lois de De Morgan, orientées de la gauche vers la droite, comme des règles de réécriture. La formule  $+X$  est clairement une formule du langage :

$$\mathcal{F} ::= \mathcal{N} \mid \mathcal{F}\wp\mathcal{F} \mid \mathcal{F}\otimes\mathcal{F} \quad \text{où } \mathcal{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^\perp \text{ est l'ensemble des atomes.}$$

On remarque que si  $F \in \mathcal{F}$  alors  $+F = F$ , et on désignera par  $-F$  l'unique formule de  $\mathcal{F}$  équivalente à  $(F)^\perp \in \mathcal{G}$ . Pour obtenir  $-F$  on remplace tout atome de  $+F$  par sa négation, toute conjonction par une disjonction et toute disjonction par une conjonction, et on récrit la formule ainsi obtenue de la droite vers la gauche. Par exemple pour  $F = (\alpha^\perp\wp\beta)\otimes\gamma^\perp$  on obtient d'abord  $F' = (\alpha\otimes\beta^\perp)\wp\gamma$ , qui donne  $F^\perp \equiv -F = \gamma\wp(\beta^\perp\otimes\alpha)$  en récrivant  $F'$  de la droite vers la gauche.

## 2.3. Rapport entre le langage catégoriel et le langage linéaire : polarités

Puisque  $\mathcal{L}$  est un sous-langage de  $\mathcal{G}$  toute formule  $L$  de  $\mathcal{L}$  admet une unique formule  $+L$  de  $\mathcal{F}$  qui lui soit équivalente, et également une unique formule  $-L$  qui soit équivalente à  $L^\perp$ . On peut définir par induction ces deux transformations de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{F}$  :

$L$	$\alpha \in \mathcal{P}$	$L = M\otimes N$	$L = M\backslash N$	$L = N/M$
$+L$	$\alpha$	$+M\otimes +N$	$-M\wp +N$	$+N\wp -M$
$-L$	$\alpha^\perp$	$-N\wp -M$	$-N\otimes +M$	$+M\otimes -N$

7.  $+X$  est un peu l'analogue de la forme normale disjonctive ou conjonctive d'une formule de la logique classique, mis à part qu'en l'absence de distributivité de  $\wp$  sur  $\otimes$  et de  $\otimes$  sur  $\wp$ , on ne peut imposer d'avoir une disjonction de conjonctions ou une conjonction de disjonctions...

EXEMPLE 1

$L$	$+L$	$-L$	
$sn$	$sn$	$sn^\perp$	syntagme nominal
$sn/n$	$sn^\perp \wp n$	$n^\perp \otimes sn$	déterminant
$n$	$n$	$n^\perp$	nom commun
$n \setminus n$	$n^\perp \wp n$	$n^\perp \otimes n$	adjectif à droite
$(n \setminus n) / (n \setminus n)$	$(n^\perp \wp n) \wp (n^\perp \otimes n)$	$(n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n)$	adverbe à gauche pour adjectifs à droite
$\beta \setminus ((\alpha / \beta) \setminus \alpha)$	$\beta^\perp \wp ((\beta \otimes \alpha^\perp) \wp \alpha)$	$(\alpha^\perp \otimes (\alpha \wp \beta^\perp)) \otimes \beta$	type raising

Considérons les ensembles de formules suivants, qui permettent de voir, parmi les formules linéaires de  $F$ , lesquelles correspondent à des formules du calcul de Lambek, ou à des négations de formules de Lambek :

$$\mathcal{F}^\circ = \{F \in \mathcal{F} / \exists L \in \mathcal{L} \quad +L = F\} \quad : \text{formules linéaires positives}$$

$$\mathcal{F}^\perp = \{F \in \mathcal{F} / \exists L \in \mathcal{L} \quad -L = F\} \quad : \text{formules linéaires négatives}$$

$$\mathcal{F}^\circ \cup \mathcal{F}^\perp : \text{formules linéaires intuitionnistes, ou polarisées.}$$

On a alors :  $F \in \mathcal{F}^\perp \Leftrightarrow -F \in \mathcal{F}^\circ$  et  $F \in \mathcal{F}^\circ \Leftrightarrow -F \in \mathcal{F}^\perp$

$$\mathcal{F}^\circ \cup \mathcal{F}^\perp \neq \mathcal{F} \text{ — par exemple } \alpha \wp \beta \notin \mathcal{F}^\circ \cup \mathcal{F}^\perp$$

$$\mathcal{F}^\perp \cap \mathcal{F}^\circ = \emptyset \text{ — en vertu de la proposition qui suit :}$$

**Proposition 2** Les ensembles de formules  $\mathcal{F}^\circ$  et  $\mathcal{F}^\perp$  sont définis par induction

$$\text{mutuelle ainsi : } \begin{cases} \mathcal{F}^\circ ::= \mathcal{P} & | & \mathcal{F}^\circ \otimes \mathcal{F}^\circ & | & \mathcal{F}^\perp \wp \mathcal{F}^\circ & | & \mathcal{F}^\circ \wp \mathcal{F}^\perp \\ \mathcal{F}^\perp ::= \mathcal{P}^\perp & | & \mathcal{F}^\perp \wp \mathcal{F}^\perp & | & \mathcal{F}^\circ \otimes \mathcal{F}^\perp & | & \mathcal{F}^\perp \otimes \mathcal{F}^\circ \end{cases}$$

Les transformations  $+$  et  $-$  sont des bijections de  $\mathcal{L}$  vers  $\mathcal{F}^\circ$  et  $\mathcal{F}^\perp$  respectivement.

Notons  $(\dots)_\mathcal{L}^\circ$  la bijection réciproque de  $+$ , de  $\mathcal{F}^\circ$  dans  $\mathcal{L}$  et  $(\dots)_\mathcal{L}^\perp$  la bijection réciproque de  $-$  de  $\mathcal{F}^\perp$  dans  $\mathcal{L}$ . Alors ces deux fonctions sont définies par induction sur les formules de  $\mathcal{F}^\circ \cup \mathcal{F}^\perp$  comme suit :

$F \in \mathcal{F}^\circ$	$\alpha \in \mathcal{P}$	$(G \in \mathcal{F}^\circ) \otimes (H \in \mathcal{F}^\circ)$	$(G \in \mathcal{F}^\perp) \wp (H \in \mathcal{F}^\circ)$	$(G \in \mathcal{F}^\circ) \wp (H \in \mathcal{F}^\perp)$
$F_\mathcal{L}^\circ$	$\alpha$	$G_\mathcal{L}^\circ \otimes H_\mathcal{L}^\circ$	$G_\mathcal{L}^\perp \setminus H_\mathcal{L}^\circ$	$G_\mathcal{L}^\circ / H_\mathcal{L}^\perp$
$F \in \mathcal{F}^\perp$	$\alpha^\perp \in \mathcal{P}^\perp$	$(G \in \mathcal{F}^\perp) \wp (H \in \mathcal{F}^\perp)$	$(G \in \mathcal{F}^\circ) \otimes (H \in \mathcal{F}^\perp)$	$(G \in \mathcal{F}^\perp) \otimes (H \in \mathcal{F}^\circ)$
$F_\mathcal{L}^\perp$	$\alpha$	$H_\mathcal{L}^\perp \otimes G_\mathcal{L}^\perp$	$H_\mathcal{L}^\perp / G_\mathcal{L}^\circ$	$H_\mathcal{L}^\circ \setminus G_\mathcal{L}^\perp$

On peut utiliser simplement la définition inductive de  $\mathcal{F}^\circ$  et  $\mathcal{F}^\perp$  pour déterminer si une formule  $F$  est dans  $\mathcal{F}^\circ$  ou dans  $\mathcal{F}^\perp$  — auquel cas toutes les sous-formules de  $F$  sont dans  $\mathcal{F}^\circ$  ou dans  $\mathcal{F}^\perp$  — ou ni dans l'un ni dans l'autre.

Pour ce faire, il suffit de remplacer tout atome positif par  $\mathcal{O}$  et tout atome négatif par  $\mathcal{I}$  et de calculer, en lisant les connecteurs  $\wp$  et  $\otimes$  comme les opérations suivantes sur  $\star, \mathcal{O}, \mathcal{I}$  :

$\wp$	$\star$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\mathcal{O}$	$\star$	$\star$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{I}$	$\star$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$

$\otimes$	$\star$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\mathcal{O}$	$\star$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$
$\mathcal{I}$	$\star$	$\mathcal{I}$	$\star$

Si le résultat de ce calcul est  $\star$  alors la formule n'est ni dans  $\mathcal{F}^{\mathcal{O}}$  ni dans  $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$  et, s'il est  $\mathcal{O}$  (resp.  $\mathcal{I}$ ) alors la formule est dans  $\mathcal{F}^{\mathcal{O}}$  (resp.  $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ ).

**EXEMPLE 3**

$F$	calcul	conclusion	$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}$	$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}$
$(\alpha^{\perp} \wp \beta) \wp \alpha$	$(\mathcal{I} \wp \mathcal{O}) \wp \mathcal{O} = \mathcal{O} \wp \mathcal{O} = \star$	$F \notin \mathcal{F}^{\mathcal{O}} \cup \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$	pas définie	pas définie
$(\alpha^{\perp} \wp \beta) \wp \alpha^{\perp}$	$(\mathcal{I} \wp \mathcal{O}) \wp \mathcal{I} = \mathcal{O} \wp \mathcal{I} = \mathcal{O}$	$F \in \mathcal{F}^{\mathcal{O}}$	$(\alpha \setminus \beta) / \alpha$	pas définie
$(\alpha^{\perp} \wp \beta) \otimes \alpha^{\perp}$	$(\mathcal{I} \wp \mathcal{O}) \otimes \mathcal{I} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{I} = \mathcal{I}$	$F \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$	pas définie	$\alpha / (\alpha \setminus \beta)$

**3. LE CALCUL DES SÉQUENTS BILATÈRE  $MLL_{\mathcal{G}}$**

Voici maintenant le calcul des séquents  $MLL_{\mathcal{G}}$  linéaire, bilatère, pour tous les connecteurs du langage  $\mathcal{G}$ . Dans la prochaine section, nous y retrouverons le calcul de Lambek.

Echange	$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Psi} (gE)$	$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, B, A, \Delta}$	
Axiome	$\frac{}{A \vdash A} ax \quad A \in \mathcal{G}$		
Règles logiques	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{A^{\perp}, \Gamma \vdash \Delta} g^{\perp}$	Négation	$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^{\perp}, \Delta} d^{\perp}$
	$\frac{\Gamma, A \vdash \Theta \quad B, \Gamma' \vdash \Theta'}{\Gamma, A \wp B, \Gamma' \vdash \Theta, \Theta'} g\wp$	Disjonction	$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, A \wp B, \Delta} d\wp$
	$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash \Psi} g\otimes$	Conjonction	$\frac{\Theta \vdash \Phi, A \quad \Theta' \vdash B, \Phi'}{\Theta, \Theta' \vdash \Phi, A \otimes B, \Phi'} d\otimes$
	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma', B, \Delta' \vdash \Psi'}{\Gamma', \Gamma, A \setminus B, \Delta' \vdash \Phi, \Psi'} g\setminus$	Implications	$\frac{A, \Gamma \vdash C, \Phi}{\Gamma \vdash A \setminus C, \Phi} d\setminus$
	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma', B, \Delta' \vdash \Psi'}{\Gamma', B / A, \Gamma, \Delta' \vdash \Phi, \Psi'} g/$		$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi, C}{\Gamma \vdash \Phi, C / A} d/$

### 3.1. Propriétés de ce calcul

#### 3.1.1. Elimination des coupures

Nous avons délibérément omis la règle de coupure de ce calcul qui peut se formuler d'une des deux manières suivantes :

$$\frac{\Theta \vdash \Phi, A \quad A, \Theta' \vdash \Psi'}{\Theta, \Theta' \vdash \Phi, \Psi'} \text{ coupure} \qquad \frac{\Theta \vdash \Phi, A \quad \Theta' \vdash A^\perp, \Phi'}{\Theta, \Theta' \vdash \Phi, \Phi'} \text{ coupure}$$

Cette règle est redondante : étant donné une démonstration sans hypothèse d'un séquent, il existe une démonstration également sans hypothèse du même séquent *qui n'utilise pas la règle de coupure*. Cela ne signifie pas que la règle de coupure soit dérivable : il n'existe pas de démonstration uniforme dont on puisse substituer une instance à toute application de la règle de coupure : la procédure d'élimination des coupures déconstruit la démonstration pour en reconstruire une autre très différente dont la taille est généralement beaucoup plus grande, mais telle que toute formule apparaissant dans l'un des séquents de la démonstration est sous-formule d'une des formules du séquent conclusion. Ainsi la démonstration automatique, dans un calcul où la règle de coupure est redondante, est-elle considérablement facilitée. Cette propriété d'élimination de la règle de coupure, que satisfont tous les calculs présentés dans cet article, est donc particulièrement importante pour le calcul de Lambek, puisque, comme on le verra ci-après, analyser un énoncé, c'est démontrer un séquent donné.

#### 3.1.2. Lois de De Morgan

Comme nous l'annonçons lors de notre description du langage de la logique linéaire, les lois de De Morgan sont validées par ce calcul. On a par exemple :

$$\frac{A \vdash A}{A^\perp, A \vdash} g^\perp \qquad \frac{A \vdash A}{\vdash A^\perp, A} d^\perp$$

$$\frac{\quad}{A \vdash (A^\perp)^\perp} d^\perp \qquad \frac{\quad}{(A^\perp)^\perp \vdash A} d^\perp$$

#### 3.1.3. Restriction de l'axiome aux symboles propositionnels

Il est facile de démontrer, par induction sur la formule  $A$ , que tout axiome  $A \vdash A$  peut se déduire d'axiomes  $\alpha \vdash \alpha$ , où  $\alpha$  est un symbole propositionnel, et ce sans utiliser la règle d'échange. Montrons par exemple que l'axiome  $A \vdash A$  pour  $A = \alpha \wp \beta^\perp$  peut être dérivé des axiomes  $\alpha \vdash \alpha$  et  $\beta \vdash \beta$  :

$$\frac{\frac{\frac{\quad}{\beta \vdash \beta} ax}{\beta, \beta^\perp \vdash} g^\perp}{\beta^\perp \vdash \beta^\perp} r^\perp}{\alpha \wp \beta^\perp \vdash \alpha, \beta^\perp} g\wp}{\alpha \wp \beta^\perp \vdash \alpha \wp \beta^\perp} d\wp$$

### 3.1.4. Inutilité et égalité des implications

Dans ce système, on peut considérer que l'implication  $A \setminus B$  est une abréviation pour  $A^\perp \wp B$ , tandis que  $A / B$  est une abréviation pour  $B \wp A^\perp$ . En effet les règles des implications sont dérivables lorsque les implications sont ainsi définies. De plus, en présence des règles d'échange, on a  $A \setminus B \equiv B / A$ .

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, A^\perp \vdash} d^\perp \quad \Delta', B, \Gamma' \vdash \Theta'}{\Delta', \Gamma, A^\perp \wp B, \Gamma' \vdash \Theta'} d\setminus \qquad \frac{\frac{A^\perp \vdash A \quad B \vdash B}{[A \setminus B \equiv A^\perp \wp B] \vdash A^\perp, B} g\wp \quad (E)}{A \setminus B \vdash B, A^\perp} d\wp \quad \frac{}{A \setminus B \vdash [B \wp A^\perp \equiv B / A]} d\wp$$

### 3.1.5. Négation et règles symétriques

Si on considère les formules aux lois de De Morgan près, alors on peut se contenter des règles droites (ou gauches). Par exemple on peut mimer la règle  $g\wp$  par la règle  $r\otimes$ :<sup>8</sup>

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash \Theta}{\Gamma \vdash A^\perp, \Theta} d^\perp \quad \frac{B, \Gamma' \vdash \Theta'}{\Gamma' \vdash B^\perp, \Theta'} d^\perp}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Theta, A^\perp \otimes B^\perp, \Theta'} d\otimes \quad \frac{}{[A \wp B \equiv (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp], \Gamma', \Gamma \vdash \Theta', \Theta} (gE) \text{ et } g^\perp}{\Gamma, [B \wp A \equiv (A^\perp \otimes B^\perp)^\perp], \Gamma' \vdash \Theta', \Theta} (gE) \text{ et } (dE)$$

## 4. VARIANTES INTUITIONNISTES

Le calcul LP, le calcul de Lambek avec permutation et séquence vide ou logique linéaire multiplicative intuitionniste,<sup>9</sup> est obtenu à partir du calcul  $MLL_g$  en ne conservant que les règles et connecteurs qui ont encore du sens lorsque les séquents ont exactement une formule à droite. On voit que seules la négation et la disjonction posent problème: le langage naturel de LP est donc  $\mathcal{L}$ . Pour les autres règles, il suffit de remplacer dans le calcul  $MLL_g$  donné dans la section 3., les variables de suites de formules  $\Phi$  et  $\Phi'$  par la séquence vide, et  $\Psi$  et  $\Psi'$  par une variable de formule.

8. Pour ne pas utiliser la règle d'échange, il aurait fallu donner un calcul des séquent plus subtil, s'inspirant de (Abrusci V. M. 1991:p. 1415) mais identifiant les deux négations (puisqu'ici on n'en considère qu'une) — ce qui, en fait, impose une forme d'échange, dite circulaire.

9. Le calcul LP et ses variantes sont étudiés et comparés, dans une perspective un peu différente, dans (van Benthem J. 1991). Mentionnons également l'utilisation linguistique de LP pour la modélisation en logique linéaire de la sémantique de LFG, dans une série d'articles dont le plus récent, à ma connaissance, est (Dalrymple M. *et al.* 1995).

Echange	$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Psi} (gE)$	
Axiome	$\frac{}{A \vdash A} ax \quad A \in \mathcal{G}$	
Règles logiques	Conjonction	$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash \Psi} g\otimes \quad \frac{\Theta \vdash \Phi, A \quad \Theta' \vdash B, \Phi'}{\Theta, \Theta' \vdash \Phi, A \otimes B, \Phi'} d\otimes$
	Implications	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma', B, \Delta' \vdash \Psi'}{\Gamma', \Gamma, A \setminus B, \Delta' \vdash \Phi, \Psi'} g\setminus \quad \frac{A, \Gamma \vdash C, \Phi}{\Gamma \vdash A \setminus C, \Phi} d\setminus$
		$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma', B, \Delta' \vdash \Psi'}{\Gamma', B/A, \Gamma, \Delta' \vdash \Phi, \Psi'} g/ \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi, C}{\Gamma \vdash \Phi, C/A} d/$

Ce calcul LP admet plusieurs variantes obtenues par suppression ou maintien de la règle de la règle d'échange et par ajout ou non de la condition suivante appelée *absence de la séquence vide*: « La suite de formule  $\Pi$  est non vide lorsqu'on utilise la règle  $d\setminus$  ou la règle  $d/$ . » ou, ce qui revient au même :

« *Tout les séquents d'une démonstration ont une partie gauche non vide.* »

Cette restriction n'affecte pas les propriétés du calcul des séquents, dont l'élimination des coupures, mais est essentielle d'un point de vue linguistique, comme nous l'expliquons ci-après.

On peut donc considérer les variantes suivantes :

- LP\* qui admet la règle d'échange mais interdit la séquence vide
- L qui interdit l'échange mais n'interdit pas la séquence vide
- L\* qui interdit l'échange et la séquence vide, c'est-à-dire le calcul de Lambek originel (Lambek J. 1958).

#### 4.1. Le calcul de Lambek vu comme une grammaire catégorielle

Pour utiliser le calcul de Lambek comme une grammaire catégorielle, on se donne des symboles propositionnels — généralement  $n$  (*nom commun*),  $sn$  (*syntagme nominal*),  $P$  (*phrase*) — et un lexique, qui assigne à chaque mot  $m_i$  une famille de formules de  $\mathcal{L}$  appelées les types de  $m_i$  qu'on notera  $[m_i] = \{T_i^1, \dots, T_i^{p_i}\}$ . Reconnaître qu'une suite de mots  $m_1 \cdots m_k$  est de type  $T$ , ce qu'on notera  $w : T$ , c'est démontrer, dans le calcul de Lambek, un séquent  $T_1, \dots, T_k \vdash P$  avec  $T_q \in [m_q]$  pour tout  $q \in [1, k]$ . En particulier si  $T = P$  (resp.  $sn$ ) alors  $m_1 \cdots m_k$  est une phrase (resp. un syntagme nominal) et la démonstration son analyse. Les règles du calculs des séquents confirment le sens intuitif des connecteurs. On a  $w : A \otimes B$  lorsque  $w = w_1 w_2$  avec  $w_1 : A$  et  $w_2 : B$ ,  $w : A \setminus B$  lorsque  $\forall w' : A$  on a  $w' w : B$ , et  $w : B/A$  lorsque  $\forall w' : A$  on a  $w w' : B$ .

On peut alors faire le lien avec les grammaires hors contexte. Soit une grammaire hors contexte, mise sous forme normale de Greibach, c'est-à-dire





On considérera également les restrictions de MLL et C-MLL aux séquents à au moins deux conclusions, notées MLL\* et C-MLL\*. On obtient ces calculs en imposant que, dans la règle d'introduction de la disjonction  $\wp$ ,  $\Gamma$  ou  $\Delta$  ne soit pas vide.

Le calcul MLL de langage  $\mathcal{F}$ , est particulièrement simple, mais démontre exactement les mêmes séquents que le calcul bilatère du paragraphe précédent :

**Proposition 7** Soient  $A_1, \dots, A_n, \dots, B_p$ ; alors on a :

$$(A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_p) \in \text{MLL}_{\mathcal{G}} \Leftrightarrow (\vdash -A_n, \dots, -A_1, +B_1, \dots, +B_p) \in \text{MLL}$$

Pour l'implication réciproque, on remarquera qu'étant donnée une formule  $F \in \mathcal{F}$  il y a en général plus d'une formule  $X \in \mathcal{G}$  telle que  $+X = F$  ou  $-X = F$ .

On peut restreindre MLL aux formules de  $\mathcal{F}^{\circ} \cup \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ , c'est-à-dire aux formules qui sont équivalentes à une formule du langage de Lambek  $\mathcal{L}$ , ou à la négation d'une formule de  $\mathcal{L}$ . Pour ce faire, il suffit de ne jamais appliquer une règle  $\otimes$  introduisant une formule  $A \otimes B$  avec  $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$  et  $B \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$  — ce qui empêche que l'on puisse introduire une formule  $A \wp B$  avec  $A \in \mathcal{F}^{\circ}$  et  $B \in \mathcal{F}^{\circ}$ . Appelons ce calcul MLL<sup>oI</sup> et C-MLL<sup>oI</sup> celui où, de plus, la règle d'échange (EC) est supprimée : on a alors la propriété remarquable suivante, qui nous permettra ci-après de retrouver les sous-calculs intuitionnistes, dont le calcul de Lambek.

**Proposition 8** Si  $\forall i \in [1, n] A_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \cup \mathcal{F}^{\circ}$  alors

$$(\vdash A_1, \dots, A_n) \in \text{MLL} \Leftrightarrow (\vdash A_1, \dots, A_n) \in \text{MLL}^{\text{oI}},$$

et si ces propriétés sont vraies, alors l'une exactement des formules est dans  $\mathcal{F}^{\circ}$ , toutes les autres étant dans  $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ . Il en est de même pour les calculs C-MLL et C-MLL<sup>oI</sup>.

## 6. LIENS ENTRE MLL ET LP, LP\*, L, L\*

Le calcul LP est une réelle restriction de MLL.<sup>11</sup> On a par exemple  $(\vdash \beta \wp \alpha, \alpha^{\perp} \otimes \beta^{\perp}) \in \text{MLL}$  mais il n'existe pas de séquent  $(X \vdash Y) \in \text{LP}$  tel que  $(+X = \beta \wp \alpha$  et  $-Y = \alpha^{\perp} \otimes \beta^{\perp})$  ou  $(-Y = \beta \wp \alpha$  et  $+X = \alpha^{\perp} \otimes \beta^{\perp})$ . En fait, il ne s'agit que d'une restriction de langage, que nous avons déjà étudiée au paragraphe 2.3.. En effet, c'est uniquement parce qu'il n'existe pas du tout de formule  $X$  de  $\mathcal{L}$  telle que  $+X = F$  ou  $-X = F$  — c'est -à-dire  $F \notin \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \cup \mathcal{F}^{\circ}$  — que ce n'est pas le cas, comme en témoigne la proposition suivante :

**Proposition 9** Si  $(\vdash F_1, \dots, F_n) \in \text{MLL}$ , avec  $\forall i \in [1, n] F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \cup \mathcal{F}^{\circ}$ , alors :

- il existe un unique indice  $i_0 \in [1, n]$  tel que  $F_{i_0} \in \mathcal{F}^{\circ}$  et pour tout autre indice  $i \in [1, n]$  on a  $F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$  en vertu de la proposition 8

11. Si l'on considère LP<sup>+</sup> dont les règles sont les mêmes que celles de LP mais dont le langage est  $\mathcal{L}^+ ::= N|\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}|L/L$ , ce n'est pas le cas :  $(A_1, \dots, A_n \vdash C) \in \text{LP}^+ \Leftrightarrow (\vdash -A_n, \dots, -A_1, +C) \in \text{MLL}$ .

– en vertu du paragraphe 2.3., chaque formule  $F_i^\perp$  où  $i \neq i_0$  est donc équivalente à une unique formule  $(F_i)_{\mathcal{L}}^I \in \mathcal{L}$ , tandis que  $F_{i_0}$  est équivalente à une unique formule  $(F_{i_0})_{\mathcal{L}}^O$

–  $\left( (F_{i_0-1})_{\mathcal{L}}^I, (F_{i_0-2})_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_1)_{\mathcal{L}}^I, (F_n)_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_{i_0+1})_{\mathcal{L}}^I \vdash (F_{i_0})_{\mathcal{L}}^O \right) \in \text{LP}$

Réciproquement,  $(X_1, \dots, X_n \vdash Y) \in \text{LP} \Rightarrow (\vdash -X_n, \dots, -X_1, +Y) \in \text{MLL}$ .

Si l'on remplace MLL par C-MLL (resp. C-MLL\*) et LP par L (resp. L\*) ces résultats restent valides. Pour ces calculs non commutatifs C-MLL, C-MLL\*, L et L\*, où l'échange est restreint ou interdit, on prendra garde de **respecter scrupuleusement l'ordre des formules** dans les séquents : cet ordre se trouve inversé lorsque les formules passent d'un côté du séquent à l'autre.

DÉMONSTRATION : La réciproque est triviale. Pour le sens direct, on procède par induction sur la construction de la démonstration, en n'utilisant l'échange (ET) que pour traduire la règle d'échange (gE) de LP. Voici par exemple comment on traite le cas d'une règle g/.

Supposons que les suites de formules intervenant dans la règle g/ soient  $\Gamma = G_1, \dots, G_n, \Gamma' = G'_1, \dots, G'_k, \Delta' = D'_1, \dots, D'_l$ . Voici la démonstration de C-MLL qui mime la règle g/ de L — rappelons que  $+A \otimes -B = -(A/B)$  (c.f. paragraphe 2.3.):

$$\frac{\frac{\frac{\vdash -D'_l, \dots, -D'_1, -B, -G'_k, \dots, -G'_1, +C'}{\vdash -B, -G'_k, \dots, -G'_1, +C', -D'_l, \dots, -D'_1} l(EC)}{\vdash -G_n, \dots, -G_1, +A} \otimes}{\vdash -G_n, \dots, -G_1, +A \otimes -B, -G'_k, \dots, -G'_1, +C', -D'_l, \dots, -D'_1} \otimes} \frac{}{\vdash -D'_l, \dots, -D'_1, -G_n, \dots, -G_1, +A \otimes -B, -G'_k, \dots, -G'_1, +C'} l(EC)}{\vdash -D'_l, \dots, -D'_1, -G_n, \dots, -G_1, -(A/B), -G'_k, \dots, -G'_1, +C'} \text{ i.e.} \quad \square$$

Donnons par exemple les traductions dans C-MLL des démonstrations (ou analyses syntaxiques) données dans les exemples 5 et 6 :

### EXEMPLE 10

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash n, n^\perp}{ax}}{\vdash n, n^\perp \otimes n, n^\perp} \otimes}{\vdash n^\perp \otimes n, n^\perp, n} (EC)}{\vdash n^\perp \otimes n, n^\perp \wp n} \wp}{\vdash n^\perp \otimes n, (n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n), n^\perp, n} \otimes} \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\vdash n, n^\perp}{ax}}{\vdash n, n^\perp} \otimes}{\vdash n, n^\perp \otimes n, n^\perp} \otimes}{\vdash n^\perp \otimes n, n^\perp, n} (EC)}{\vdash n^\perp \otimes n, n^\perp, n \otimes sn^\perp, sn} \otimes}{\vdash n^\perp \otimes n, (n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n), n^\perp, n \otimes sn^\perp, sn} \otimes} \frac{}{\vdash sn^\perp, sn} ax} \otimes$$

simple	très	exemple	un
$n \setminus n$	$(n \setminus n) / (n \setminus n)$	$n$	$sn / n$



alternant élémentaire, c'est-à-dire un chemin dont les arêtes sont alternativement de couleur  $B$  et  $R$  et qui n'emprunte pas deux fois la même arête. Comme les arêtes  $B$  constituent un couplage, un tel chemin n'a pas non plus de point double, sauf éventuellement si le premier est égal au dernier. Plus formellement, un chemin  $\alpha$  est une suite finie d'arêtes  $(a_i)_{i \in [1, n]}$  telle que :

$$i \neq j \implies a_i \neq a_j \qquad \#(a_i \cap a_{i+1}) = 1$$

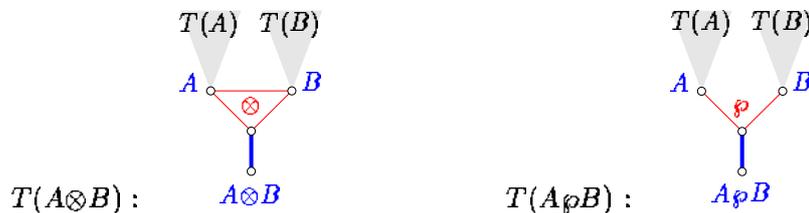
$$a_i \in B \implies a_{i+1} \in R \qquad a_i \in R \implies a_{i+1} \in B$$

**7.1.1.2. Préréseaux** Les préréseaux sont des  $R \& B$  graphes obtenus à partir de graphes  $R \& B$  élémentaires appelés liens :

Liens			
Nom	Graphe	Prémises	Conclusions
Axiome		aucune	$\alpha$ et $\alpha^\perp$
Tenseur		$A$ et $B$	$A \otimes B$
Par		$A$ et $B$	$A \wp B$

**Définition 14 (arbre  $R \& B$  des sous-formules)** Etant donnée une formule  $C$ , son arbre<sup>12</sup>  $R \& B$  des sous-formules  $T(C)$  est un graphe  $R \& B$  défini inductivement comme suit :

- Si  $C = \alpha$  est atomique, alors  $T(C)$  est :
- $T(A \otimes B)$  et  $T(A \wp B)$  sont définis à partir de  $T(A)$  et  $T(B)$  ainsi :



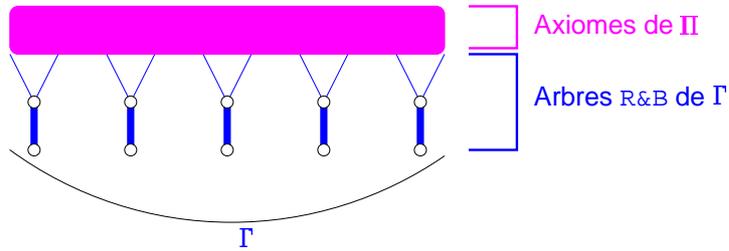
**Définition 15 (préréseau de conclusions  $\Gamma$ )** Un préréseau de conclusions  $\Gamma$  consiste en :

- la famille des arbres  $R \& B$  des formules de  $\Gamma$

12. Attention! L'arbre  $R \& B$  d'une formule  $C$  n'est pas un arbre : tout lien *Tenseur*, par exemple, donne lieu à un cycle. Nous avons néanmoins choisi ce nom parce qu'il s'agit d'un graphe qui ressemble à l'arbre des sous-formules de  $C$  et que, relativement aux chemins élémentaires alternés — les seuls que nous considérons —, ils ne contiennent pas de cycle, tout comme les arbres.

- un ensemble d'arêtes  $\mathbb{R}$  disjointes reliant des feuilles deux à deux orthogonales, de sorte que toute feuille est atteinte exactement une fois.

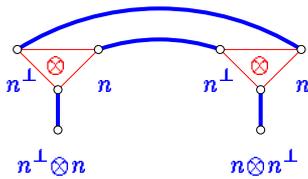
En bref, la structure d'un pré-réseau est la suivante :



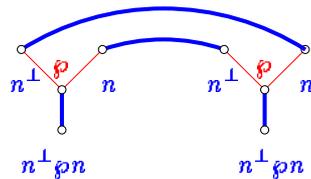
On notera que l'ordre gauche-droite des conclusions de  $\Gamma$  ne fait pas partie de la structure, et que par contre les arbres distinguent leur fils droit de leur fils gauche.

Voici maintenant quelques exemples de pré-réseaux :

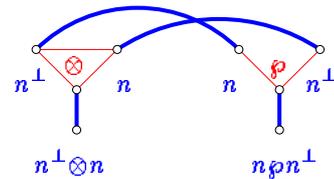
EXEMPLE 16



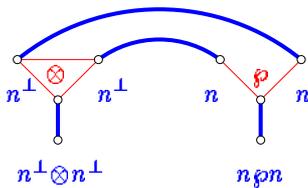
EXEMPLE 17



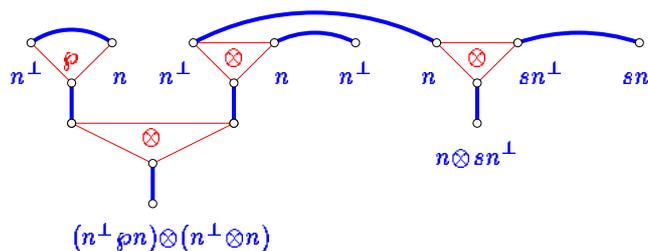
EXEMPLE 18



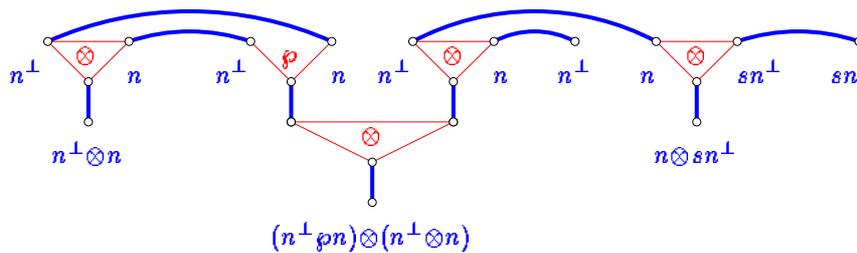
EXEMPLE 19



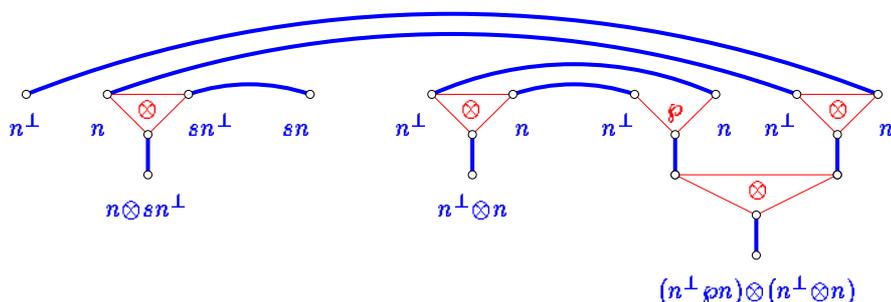
EXEMPLE 20



EXEMPLE 21



EXEMPLE 22



7.1.1.3. Réseaux

**Définition 23 (réseau)** *Un réseau est un préréseau satisfaisant :*

$\emptyset \mathcal{A}$  : *il n'y a pas de cycle  $\mathfrak{a}$ , un cycle  $\mathfrak{a}$  étant un cycle alternant élémentaire.*

SAT : *entre deux points quelconque il existe toujours un chemin  $\mathfrak{a}$ .*<sup>13</sup>

La proposition suivante (Retoré C. 1996) montre que les réseaux sont des structures syntaxiques «raisonnables» d'un point de vue algorithmique.

**Proposition 24** *Etant donné un préréseau à  $n$  sommets, il existe un algorithme qui termine en moins de  $n^3$  étapes et qui détermine s'il est ou non un réseau.*

Parmi les exemples de préréseaux donnés précédemment, seuls ceux des exemples 18, 19, 20, 21 et 22 sont des réseaux. L'exemple 16 contient un cycle  $\mathfrak{a}$  et l'exemple 17 ne contient pas de chemin  $\mathfrak{a}$  entre les atomes  $n^\perp$  et  $n$  les plus à gauche.

7.1.2. Séquents et réseaux

**Proposition 25** *Toute démonstration dans C-MLL d'un séquent  $\vdash A_1, \dots, A_n$  se traduit en un réseau de conclusions  $A_1, \dots, A_n$ . Réciproquement, étant donné un réseau de démonstration de conclusions  $A_1, \dots, A_n$  il lui correspond au moins une démonstration de conclusion  $\vdash A_1, \dots, A_n$  dans C-MLL — chacune de ces démonstrations du calcul des séquents est appelée une séquentialisation du réseau.*

DÉMONSTRATION : Nous ne montrons ici que la première partie de ce résultat qui montre comment sont inductivement construits les réseaux, en procédant par induction sur la démonstration du calcul des séquents. Pour la réciproque, nous renvoyons à (Retoré C. 1996).

Remarquons pour commencer que la règle d'échange est interprétée par l'égalité des réseaux correspondant aux démonstrations du calcul des séquents avant et après application de cette règle. Ainsi la transposition de deux conclusions, qui suffit

13. En présence de  $\emptyset \mathcal{A}$  on peut également formuler SAT ainsi : pour un choix arbitraire d'une seule arête  $\mathfrak{R}$  par lien *Par*, le graphe est connexe — voir par exemple (Fleury A. & Retoré C. 1994; Retoré C. 1996).

à engendrer la règle d'échange donnée, ne modifie-t-elle pas le (pré)réseau tel que nous l'avons défini — cela entremêle les liens axiomes, mais cela ne fait pas partie de notre description du (pré)réseau : ainsi les exemples 21 et 22 sont-ils considérés comme identiques.

Démonstration $\partial$ de MLL	Réseau correspondant $\partial^*$
$\frac{}{\vdash \alpha^\perp, \alpha} ax$	
$\frac{\begin{array}{c} \vdots \partial_1 \\ \vdash \Gamma, A, B \end{array}}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp$	
$\frac{\begin{array}{c} \vdots \partial_1 \\ \vdash \Gamma, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \partial_2 \\ \vdash B, \Gamma' \end{array}}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Gamma'} \otimes$	

Par cette définition, les démonstrations des exemples 10 et 11, se traduisent par le réseau 21.

On vérifie aisément par induction que les pré-réseaux ainsi obtenus sont bel et bien des réseaux : ce sont clairement des pré-réseaux, et nul cycle  $\alpha$  ne peut apparaître. Pour SAT, il suffit de remarquer, par induction également, qu'il existe toujours un chemin  $\alpha$  entre deux conclusions.  $\square$

Règles et liens se correspondent ( $ax/Axiome, \wp/Par, \otimes/Tenseur$ ), et la dernière règle du calcul des séquents utilisée correspond toujours à un lien final du réseau — un lien dont la conclusion est une conclusion du réseau — tandis que l'inverse est faux. On a néanmoins la propriété suivante, qui nous sera utile par la suite :

**Proposition 26** *Dans un réseau correct dont toutes les conclusions sont des liens Tenseurs ou Axiomes, et qui n'est pas réduit à un axiome, l'un au moins des Tenseur conclusions est scindant c'est-à-dire que chacune des deux arêtes  $\mathbb{B}$  prémisses est un isthme du graphe — une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.*

DÉMONSTRATION : Puisque le réseau est correct, il correspond au moins à une démonstration du calcul des séquents. Sa dernière règle est nécessairement une règle *Tenseur*. Par la traduction des séquents aux réseaux cette règle correspond effectivement à un lien *Tenseur* conclusion dont les deux prémisses sont des isthmes.  $\square$

Dans l'exemple 21 le lien *Tenseur* final  $n^\perp \otimes n$  n'est pas scindant : il ne peut représenter la dernière règle d'une démonstration du calcul des séquents

correspondant au réseau tout entier. Par contre  $(n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n)$  et  $n \otimes sn^\perp$  sont des *Tenseurs* scindants, ce que confirment les séquentialisations de ce réseau données dans les exemples 10 et 11.

**7.1.2.1. Une représentation des réseaux et pré-réseaux** Pour connaître un (pré)réseau  $\Pi$  il suffit de connaître les formules conclusions, et les couples d'atomes liés par des liens axiomes. Ces couples peuvent être décrits au moyen d'une 2-permutation  $\sigma_\Pi$  — c'est-à-dire d'une permutation satisfaisant  $\sigma_\Pi^2 = Id$  et  $\forall x \sigma_\Pi(x) \neq x$  — définie sur l'ensemble des *occurrences* d'atomes apparaissant les conclusions. Cette représentation nous sera nécessaire pour caractériser les réseaux du calcul de Lambek, c'est-à-dire ceux qui correspondent à des analyses syntaxiques dans le calcul de Lambek.<sup>14</sup>

**EXEMPLE 27**

Réseau $\Pi$	Exemple 21										Exemple 18			
Conclusions de $\Pi$	$n^\perp \otimes n$	$(n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n)$								$n^\perp$	$n \otimes sn^\perp$	$sn$	$n^\perp \otimes n$	$n \wp n^\perp$
Occurrence d'atome $x$	$n_1^\perp$	$n_2$	$n_3^\perp$	$n_4$	$n_5^\perp$	$n_6$	$n_7^\perp$	$n_8$	$sn_9^\perp$	$sn_{10}$	$n_1^\perp$	$n_2$	$n_3$	$n_4^\perp$
Image $\sigma_\Pi(x)$	$n_4$	$n_3^\perp$	$n_2$	$n_1^\perp$	$n_8$	$n_7^\perp$	$n_6$	$n_5^\perp$	$sn_{10}$	$sn_9^\perp$	$n_3$	$n_4^\perp$	$n_1^\perp$	$n_2$

**7.2. Réseaux intuitionnistes**

**Définition 28** *Un réseau intuitionniste de conclusions  $F_1, \dots, F_n$  est un réseau satisfaisant :*

$$\text{IO} : \forall i \in [1, n] F_i \in \mathcal{F}^\circ \cup \mathcal{F}^\perp.$$

L'exemple 19 n'est pas un réseau intuitionniste, puisque  $n \wp n \notin \mathcal{F}^\perp \cup \mathcal{F}^\circ$ .

**Proposition 29** *Toute démonstration de  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  dans LP se traduit en un réseau intuitionniste de conclusion  $-A_n, \dots, -A_1, +B$ .*

*Réciproquement, étant donné un réseau de démonstration  $\Pi$  de conclusions  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ . Soit  $i_0$  l'unique indice de  $[1, n]$  tel que  $F_{i_0} \in \mathcal{F}^\circ$  et  $F_i \in \mathcal{F}^\perp$ , pour  $i \neq i_0$ . Alors  $\Pi$  est la traduction d'au moins une démonstration dans LP de  $(F_{i_0-1})^\perp_{\mathcal{L}}, (F_{i_0-2})^\perp_{\mathcal{L}}, \dots, (F_1)^\perp_{\mathcal{L}}, (F_n)^\perp_{\mathcal{L}}, \dots, (F_{i_0+1})^\perp_{\mathcal{L}} \vdash (X_{i_0})^\circ_{\mathcal{L}}$ .*

**DÉMONSTRATION :** Le sens direct est immédiat.

Pour la réciproque, il faut d'abord justifier l'existence de  $i_0$ . Cela découle du théorème 25 (qui montre que  $\Pi$  est la traduction d'une démonstration de MLL) et de la proposition 8 (qui montre qu'une démonstration de MLL dont toutes les conclusions sont dans  $\mathcal{F}^\perp \cup \mathcal{F}^\circ$  a exactement une conclusion dans  $\mathcal{F}^\circ$  et toutes les autres dans  $\mathcal{F}^\perp$ ). Le résultat se déduit alors immédiatement de la proposition 9, qui montre qu'à

14. A l'heure actuelle, la représentation d'un pré-réseau par un graphe (qui s'en déduit immédiatement) est nécessaire pour vérifier qu'il est un réseau (Girard J.-Y. 1987; Danos V. & Regnier L. 1989; Asperti A. 1991; Asperti A. & Dore G. 1994; Métayer F. 1994), à moins d'utiliser un critère sémantique dont la vérification nécessite hélas un nombre exponentiel d'étapes (Retoré C. 1997).

une séquentialisation de  $\Pi$  dans MLL, de conclusion  $\vdash F_1, \dots, F_n$  il correspond une démonstration de conclusion  $(F_{i_0-1})_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}, (F_{i_0-2})_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}, \dots, (F_1)_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}, (F_n)_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}}, \dots, (F_{i_0+1})_{\mathcal{L}}^{\mathcal{I}} \vdash (X_{i_0})_{\mathcal{L}}^{\mathcal{O}}$  dans LP.  $\square$

### 7.3. Réseaux cycliques

Nous allons ici étudier les réseaux correspondants à C-MLL. Ce sont les réseaux qui peuvent se représenter dans le plan sans que leurs axiomes se croisent, en disposant les liens comme nous l'avons fait jusqu'ici. Cette condition est strictement plus forte que d'être un graphe planaire, et c'est pourquoi nous l'exprimerons sans faire référence au plongement dans le plan, en termes de permutations. Cette restriction va permettre, en la conjugant avec la précédente, de caractériser les réseaux du calcul de Lambek, et donc d'analyser directement phrases ou syntagmes par des réseaux de démonstration, ce qui est plus efficace.

#### 7.3.1. Permutations circulaires et compatibilité d'une 2-permutation

Une permutation  $\psi$  sur un ensemble  $E$  est dite circulaire lorsque

$$\forall x, y \in E \quad \exists k \in [0, n-1] \quad y = \psi^k(x) \quad (\text{en posant } \psi^0(x) = x)$$

auquel cas on peut la représenter  $\psi$  par une expression :

$$\triangleright x; \psi(x); \psi(\psi(x)); \dots; \psi^{n-1}(x) \triangleright$$

Etant donnés  $x, y \in E$ , et un entier  $k \in [0, n-1]$  tel que  $y = \psi^k(x)$ , on notera  $[x, y]$  l'ensemble  $\{z / \exists j \in [0, k] \quad z = \psi^j(x)\}$ ; on définit similairement  $[x, y[$  comme l'ensemble  $\{z / \exists j \in [0, k[ \quad z = \psi^j(x)\}$  etc.

Etant donné un ensemble  $E$  muni d'une permutation circulaire  $\psi$  et d'une 2-permutation  $\sigma$  on peut alors exprimer en termes d'intervalles, sans faire référence à un plongement dans le plan, le fait géométrique suivant : en disposant les points de  $E$  sur un cercle selon l'ordre (cyclique) défini par  $\psi$ , les segments d'extrémités  $x$  et  $\sigma(x)$  *ne se croisent pas* — en d'autres termes,  $\sigma$  est un bon parenthésage, relativement à l'ordre (cyclique)  $\psi$  sur  $E$ .

**Définition 30** Une 2-permutation  $\sigma$  de  $E$  est dite compatible avec une permutation circulaire  $\psi$  de  $E$  lorsque  $\forall x, y \in E \quad x \in [y, \sigma(y)] \Rightarrow \sigma(x) \in [y, \sigma(y)]$ .

Ainsi la 2-permutation  $\sigma_{\Pi}$  de l'exemple 27  $(n_1^{\perp}, n_3), (n_2, n_4^{\perp})$  n'est-elle pas compatible avec la permutation circulaire  $\triangleright n_1^{\perp}; n_2; n_3; n_4^{\perp} \triangleright$ . On a en effet  $n_2 \in [n_1^{\perp}, \sigma_{\Pi}(n_1^{\perp}) = n_3]$  tandis que  $\sigma_{\Pi}(n_2) = n_4^{\perp} \notin [n_1^{\perp}, n_3]$ .

Dans la définition qui suit, les  $E_i$  doivent être pensés comme les suites d'atomes des conclusions d'un réseau  $\Pi$ , ces conclusions étant cycliquement ordonnées par une permutation circulaire  $\Psi_{\Pi}$ . La permutation circulaire induite est l'ordre cyclique qui en résulte sur les atomes — ce qui, en lisant  $\sigma$  de la définition précédente comme  $\Psi_{\Pi}$ , permettra bien d'exprimer l'absence de croisement entre les liens axiomes.

**Définition 31** Soit  $\triangleright E_1; \dots; E_n \triangleright$  une permutation circulaire sur  $M = \{E_1, \dots, E_n\}$  où chaque  $E_i$  est une suite de symboles  $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{p_i}$ . La permutation circulaire induite par  $\Psi$  sur la somme disjointe des symboles des

$E_i$  est la permutation circulaire dont une représentation est :

$$\triangleright a_1^1; a_1^2; \dots; a_1^{j_1}; a_2^1; a_2^2; \dots; a_2^{j_2}; \dots; a_n^1; a_n^2; \dots; a_n^{j_n} \triangleright$$

Nous aurons besoin, pour caractériser les réseaux du calcul de Lambek, du lemme suivant, dont la démonstration est donnée dans l'annexe 1 :

**Proposition 32** Soit  $\Psi$  une permutation circulaire sur un ensemble  $M$  de  $n$  suites de symboles  $M = E_1, \dots, E_n$ . Soit  $\psi$  la permutation circulaire induite sur  $E = \oplus E_i$ , au sens de 31. Soit  $\sigma$  une 2-permutation de  $E$ , compatible avec  $\psi$ , au sens de 30. On définit sur  $M$  la relation  $\Sigma$  par :  $E_i \Sigma E_j$  lorsqu'il existe  $x_i \in E_i$  tel que  $\sigma(x_i) \in E_j$ . Soit  $\Sigma^*$  la clôture transitive de  $\Sigma$ ; si  $\Sigma^*$  a exactement deux classes d'équivalence  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{D}$ , alors il existe  $G \in \mathcal{G}$  et  $D \in \mathcal{D}$  tels que :  $\mathcal{G} = [G, D[$  et  $\mathcal{D} = [D, G[$ .

### 7.3.2. Réseaux cycliques

**Définition 33** Un pré-réseau cyclique de conclusion  $\Psi : \triangleright A_1; \dots; A_n \triangleright$  est un pré-réseau dont les conclusions  $A_1, \dots, A_n$  sont munies d'une permutation circulaire  $\Psi_{\Pi} : \triangleright A_1, \dots, A_n \triangleright$ . On notera  $\Psi_{\Pi}^{at}$  la permutation circulaire que  $\Psi_{\Pi}$  induit sur les atomes de  $\Psi$  — au sens de 31.

**Définition 34** Un pré-réseau cyclique de conclusion  $\Psi : \triangleright A_1, \dots, A_n \triangleright$  est un réseau cyclique si et seulement s'il est un réseau de conclusions  $A_1, \dots, A_n$  (s'il satisfait  $\emptyset \in \mathcal{A}$  et SAT) et si de plus on a :

CYCL :  $\sigma_{\Pi}$  est compatible avec  $\Psi_{\Pi}^{at}$

Ainsi, le pré-réseau de l'exemple 18 n'est pas un réseau circulaire. En effet,  $\Psi_{\Pi} = \triangleright n_1^{\perp} \otimes n_2; n_3 \wp n_4^{\perp} \triangleright$  (il n'y a que deux conclusions, il n'y a donc qu'une seule permutation circulaire possible), et  $\Psi_{\Pi}^{at} = \triangleright n_1^{\perp}; n_2; n_3; n_4^{\perp} \triangleright$ , tandis que la 2-permutation  $\sigma_{\Pi}$  définie par ses liens axiomes, donnée dans l'exemple 27, n'est pas compatible avec  $\Psi_{\Pi}^{at}$  — comme on l'a mentionné à la suite de la définition 30.

Par contre les réseaux des exemples 19, 20, 21 et 22 sont des réseaux cycliques.

**Proposition 35** Toute démonstration d'un séquent  $\vdash A_1, \dots, A_n$  dans C-MLL se traduit en un réseau cyclique de conclusion  $\triangleright A_1; \dots; A_n \triangleright$ .

Réciproquement, tout réseau cyclique de conclusion  $\triangleright A_1; \dots; A_n \triangleright$  est la traduction d'au moins une démonstration de  $\vdash A_1, \dots, A_n$  dans C-MLL.

DÉMONSTRATION : Le sens direct est immédiat, par induction sur la démonstration du calcul des séquents, mais on fera attention à la compatibilité de  $\Psi_{\Pi}^{at}$  avec  $\sigma_{\Pi}$  et il est pour cela utile de placer les atomes des réseaux sur un cercle, les axiomes à l'intérieur de ce cercle, et les arbres R&B à l'extérieur de ce cercle. . . Ainsi l'échange circulaire (EC) sera-t-il interprété par l'égalité.

Pour la réciproque, on procède par récurrence sur le nombre de liens du réseau  $\Pi$ . Comme ce réseau cyclique est a fortiori un réseau on peut lui appliquer la proposition 26.

Si  $\Pi$  est réduit à un axiome de conclusion  $\triangleright \alpha, \alpha^\perp \triangleright = \triangleright \alpha, \alpha^\perp \triangleright$  une séquentialisation évidente est l'axiome  $\vdash \alpha, \alpha^\perp$  de C-MLL.

Si  $\Pi$  a un lien *Par* final  $A_i = A \wp A'$ , considérons  $\Pi'$  le réseau obtenu en supprimant ce lien *Par* final et en munissant ses conclusions de la permutation circulaire  $\triangleright A_1; \dots; A_{i-1}; A; A'; A_{i+1}; \dots; A_n \triangleright$ . Alors  $\Pi'$  est aussi un réseau cyclique, puisque  $\Psi_{\Pi'}^{\alpha\beta} = \Psi_{\Pi}^{\alpha\beta}$  et  $\sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi}$ . Par hypothèse de récurrence, il y a donc une démonstration de C-MLL qui correspond à  $\Pi'$ , et en appliquant la règle  $\wp$  à cette démonstration on obtient une séquentialisation de  $\Pi$ .

Autrement,  $\Pi$  possède un *Tenseur* scindant,  $A_i = A \otimes A'$ . En supprimant ce lien on fait apparaître deux réseaux déconnectés  $\Pi_A$  et  $\Pi_{A'}$  de conclusions respectives  $\Gamma_A = A_{i_1}, \dots, A_{i_p}, A$  et  $\Gamma_{A'} = A_{j_1}, \dots, A_{j_q}, A$  avec  $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} = [1, n] \setminus \{i\}$ . Considérons le pré-réseau  $\Pi' = \Pi_A \cup \Pi_{A'}$  et munissons ses conclusions de la permutation circulaire  $\triangleright A_1; \dots; A_{i-1}; A; A'; A_{i+1}; \dots; A_n \triangleright$ . Comme  $\Psi_{\Pi'}^{\alpha\beta} = \Psi_{\Pi}^{\alpha\beta}$  et  $\sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi}$ , la 2-permutation  $\sigma_{\Pi'}$  est compatible avec  $\Psi_{\Pi'}^{\alpha\beta}$ . Soit  $\Sigma$  la relation symétrique entre conclusions de  $\Pi'$  définie par :  $\exists x \in C \sigma_{\Pi}(x) \in C'$  — en d'autres termes,  $\Pi$  contient un axiome dont l'une des conclusions est dans  $C$  et l'autre dans  $C'$ . Dire que  $A \otimes B$  est scindant dans  $\Pi$ , c'est-dire-que  $\Sigma^*$  a exactement deux classes d'équivalence,  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_{A'}$ . D'après la proposition 32 il existe une représentation de la permutation sur les conclusions de  $\Pi'$  qui est  $\triangleright A_{i_1}; \dots, A_{i_p}; A; A', A_{j_1}; \dots; A_{j_q} \triangleright$ . Il est alors clair que  $\Pi_A$  (resp.  $\Pi_{A'}$ ) muni de la permutation circulaire  $\triangleright A_{i_1}; \dots, A_{i_p}; A \triangleright$  (resp.  $\triangleright A', A_{j_1}; \dots; A_{j_q} \triangleright$ ) est un réseau cyclique. En effet  $\Pi_A$  est un réseau, et comme  $\sigma_{\Pi_A}$  et  $\Psi_{\Pi_A}^{\alpha\beta}$  sont les restrictions à  $\Gamma_A$  de  $\sigma_{\Pi}$  et  $\Psi_{\Pi}^{\alpha\beta}$  elles sont compatibles — et le même argument vaut pour  $\Pi_{A'}$ .

On dispose donc, par hypothèse d'induction de deux démonstrations de C-MLL de conclusions respectives  $\vdash A_{i_1}; \dots, A_{i_p}; A$  et  $\vdash A'; A_{j_1}; \dots; A_{j_q}$  correspondant à  $\Pi_A$  et  $\Pi_{A'}$ . Si on leur applique la règle  $\otimes$  de C-MLL on obtient bien une démonstration de conclusion  $\vdash \Gamma_A, A \otimes B, \Gamma_{A'}$  qui correspond à  $\Pi$ .  $\square$

Ainsi les démonstrations des exemples 10 et 11 correspondent elles au réseau cyclique de l'exemple 21, qui est *égal* à celui de l'exemple 22. En effet l'expression  $\triangleright n^\perp \otimes n; (n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n); n^\perp; n \otimes sn^\perp; sn \triangleright$  et l'expression  $\triangleright n^\perp; n \otimes sn^\perp; sn; n^\perp \otimes n; (n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n) \triangleright$  représentent la même permutation circulaire.

#### 7.4. Réseaux du calcul de Lambek avec et sans séquence vide

Pour caractériser les réseaux du calcul de Lambek sans séquence vide, qui correspondent aux démonstrations de  $L^*$ , nous utiliserons la proposition suivante, démontrée dans l'annexe 2. Cette proposition fait appel à la notion de sous-(pré)réseau : un sous-pré-réseau (resp. sous-réseau)  $\Pi'$  d'un (pré)réseau  $\Pi$  est un sous-graphe de  $\Pi$  qui est un pré-réseau (resp. réseau).<sup>15</sup>

**Proposition 36** *Soit  $\Pi$  un réseau; les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Tout sous-pré-réseau de  $\Pi$  contient au moins deux conclusions. (ÉTOILE)*
2. *Tout sous-réseau de  $\Pi$  contient au moins deux conclusions.*

<sup>15</sup> Un sous-pré-réseau d'un réseau n'est pas toujours un réseau : il se peut que SAT ne soit pas vérifiée par le sous-pré-réseau.

3. Toute séquentialisation de  $\Pi$  ne contient que des séquents ayant au moins deux conclusions.

4. Il existe une séquentialisation de  $\Pi$  dans laquelle tout séquent contient au moins deux formules.

**Définition 37** Un réseau de Lambek est un réseau cyclique et intuitionniste, c'est-à-dire un pré-réseau cyclique de conclusion  $\Psi_{\Pi} = \triangleright F_1; \dots; F_n \triangleright$  qui satisfait :

$\emptyset\mathcal{A}$  : Il n'y a pas de cycle  $\mathfrak{a}$ , un cycle  $\mathfrak{a}$  étant un cycle alternant élémentaire.

SAT : Entre deux points quelconques il existe toujours un chemin  $\mathfrak{a}$ .

IO : Toute conclusion  $F_i$  est dans  $\mathcal{F}^I \cup \mathcal{F}^O$ .

CYCL :  $\sigma_{\Pi}$  est compatible avec  $\Psi_{\Pi}^{\text{at}}$  — les axiomes de  $\Pi$  ne se croisent pas.

On dira qu'un réseau de Lambek est sans séquence vide si de plus :

ÉTOILE : Tout sous-pré-réseau de  $\Pi$  contient au moins deux conclusions.<sup>16</sup>

**Proposition 38** Toute démonstration de  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  dans  $L$  (resp.  $L^*$ ) se traduit en un un réseau de Lambek (resp. un réseau de Lambek sans séquence vide) de conclusion  $\triangleright -A_n; \dots, -A_1; +B \triangleright$ .

Réciproquement, soit  $\Pi$  un un réseau de Lambek (resp. un réseau de Lambek sans séquence vide) de conclusion  $\triangleright F_1; \dots; F_n \triangleright$ . et soit  $i_0$  l'unique indice de  $[1, n]$  tel que  $F_{i_0} \in \mathcal{F}^O$  et  $F_i \in \mathcal{F}^I$ , pour  $i \neq i_0$ . Alors le réseau  $\Pi$  est la traduction d'au moins une démonstration dans  $L$  (resp.  $L^*$ ) du séquent  $(F_{i_0-1})_{\mathcal{L}}^I, (F_{i_0-2})_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_1)_{\mathcal{L}}^I, (F_n)_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_{i_0+1})_{\mathcal{L}}^I \vdash (F_{i_0})_{\mathcal{L}}^O$ .

DÉMONSTRATION : La première partie est immédiate par induction sur la démonstration de  $L$  (resp.  $L^*$ ). Pour la seconde, on sait d'après le paragraphe précédent que  $\Pi$  admet une séquentialisation dans C-MLL, de conclusion  $\vdash F_1, \dots, F_n$ . En raison de la proposition 9, à cette démonstration de C-MLL il correspond dans  $L$  une démonstration de  $(F_{i_0-1})_{\mathcal{L}}^I, (F_{i_0-2})_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_1)_{\mathcal{L}}^I, (F_n)_{\mathcal{L}}^I, \dots, (F_{i_0+1})_{\mathcal{L}}^I \vdash (F_{i_0})_{\mathcal{L}}^O$ . En utilisant  $1 \Rightarrow 3$  de la proposition 36, on voit que si  $\Pi$  est un réseau de Lambek sans séquence vide, la séquentialisation précédemment obtenue dans  $L$  est en fait dans  $L^*$ .  $\square$

Parmi nos exemples de pré-réseaux, seuls les réseaux des exemples 20, 21 et 22 sont des réseaux de Lambek. L'exemple 21 correspond aux analyses syntaxiques 5 et 6 : on s'est ainsi débarrassé d'une *spurious ambiguity*. L'avantage d'avoir considéré des permutations circulaires est que dans ce cadre les exemples 21 et 22 sont égaux. L'exemple 20 n'est pas un réseau de Lambek sans séquence vide : il contient en effet un sous-réseau dont l'unique conclusion est  $n^{\perp} \wp n$ . Il correspond précisément à la démonstration dans  $L$  donnée dans l'exemple 4.

16. Nous avons choisi, parmi les quatre formulations, 1 plutôt que 2, car les sous-pré-réseaux sont plus facilement identifiables : il suffit de se donner un ensemble de sous-formules apparaissant dans le réseau qui soit clos par sous-formules et liens axiomes — sans vérifier SAT ni  $\emptyset\mathcal{A}$ . On peut aussi, en présence de CYCL et de  $\emptyset\mathcal{A}$  dire que pour toute sous-formule  $G$  d'une conclusion, le premier et le dernier atome de  $G$  ne sont jamais reliés par un axiome : si  $G = \Pi \otimes \Pi'$  alors c'est toujours le cas, et si  $G = \Pi \wp \Pi'$ , c'est précisément dire qu'on n'a pas de sous-réseau à une seule conclusion.

## 8. L'ANALYSE SYNTAXIQUE VUE COMME LA CONSTRUCTION D'UN RÉSEAU DE LAMBEK

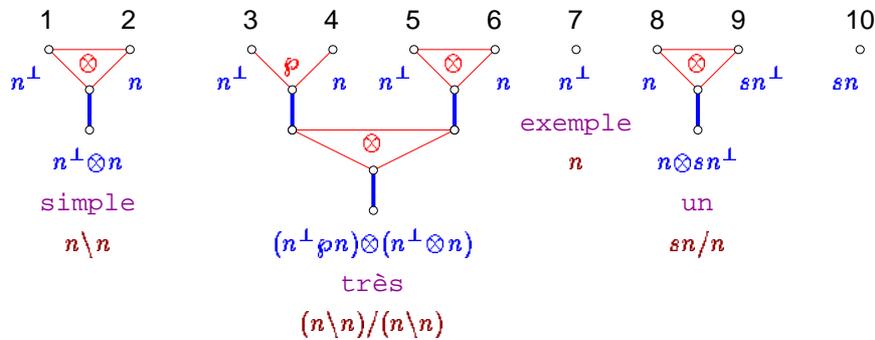
Supposons qu'on souhaite analyser le syntagme nominal un exemple très simple, suivant le lexique donné dans l'exemple 4. Il nous faut donc chercher une démonstration du calcul de Lambek de :

$$sn/n, n, (n \setminus n) / (n \setminus n), n \setminus n \vdash sn.$$

En vertu de la proposition 38 cela revient donc à construire un réseau de Lambek sans séquence vide dont la conclusion soit :

$$\triangleright n^\perp \otimes n; (n^\perp \wp n) \otimes (n^\perp \otimes n); n^\perp; n \otimes sn^\perp; sn \triangleright$$

— ces « types linéaires » étant automatiquement calculés comme on l'a fait dans l'exemple 1, et l'ordre étant inversé (voir la proposition 9). On dispose donc de la partie arbres R&B du réseau :



Il ne reste donc qu'à définir  $\sigma_{\text{II}}$ , c'est-à-dire placer les liens axiomes, entre les occurrences d'atomes  $n_1^\perp, n_2, n_3^\perp, n_4, n_5^\perp, n_6 n_7^\perp, n_8, sn_9^\perp, sn_{10}$  de sorte que  $\emptyset\mathcal{A}\mathcal{E}$ , SAT, IO, CYCL, ÉTOILE soient vérifiées. Evidemment, IO est automatiquement vérifiée puisque toutes les formules correspondent à des traductions de formules de  $\mathcal{L}$ . Pour commencer, il doit obligatoirement y avoir un axiome  $(sn_9^\perp, sn_{10})$ . Il reste alors à placer les axiomes entre les  $n$  et les  $n^\perp$ , ce qui fait a priori 24 possibilités. Mais en utilisant les contraintes  $\emptyset\mathcal{A}\mathcal{E}$ , SAT, CYCL et ÉTOILE il n'y a guère de choix :

$(n_4, n_5^\perp) \notin \sigma_{\text{II}}$  —  $\emptyset\mathcal{A}\mathcal{E}$ , cycle  $\mathfrak{x}$  avec le lien *Tenseur* de  $(n_3^\perp \wp n_4) \otimes (n_5^\perp \otimes n_6)$ .

$(n_5^\perp, n_6) \notin \sigma_{\text{II}}$  —  $\emptyset\mathcal{A}\mathcal{E}$ , cycle  $\mathfrak{x}$  avec le lien *Tenseur* entre ces deux atomes.

$(n_3^\perp, n_4) \notin \sigma_{\text{II}}$  — ÉTOILE, sous-réseau à une seule conclusion.

$(n_4, n_7^\perp) \notin \sigma_{\text{II}}$  — CYCL imposerait  $(n_4, n_5^\perp)$ , qui est prohibé.

$(n_1^\perp, n_4) \in \sigma_{\text{II}}$  — seul choix encore possible pour  $n_4$ .

$(n_2, n_3^\perp) \in \sigma_{\text{II}}$  — CYCL, en vertu de la ligne précédente.

$(n_7^\perp, n_8) \notin \sigma_{\text{II}}$  — SAT, réseau totalement déconnecté.

$(n_5^\perp, n_8), (n_6, n_7^\perp) \in \sigma_{\text{II}}$  — seul choix encore possible pour ces atomes.

La seule solution possible est donc celle donnée par la 2-permutation  $\sigma_{\Pi}$  donnée dans l'exemple 27 :  $(n_1^{\perp}, n_4), (n_2, n_3^{\perp}), (n_5^{\perp}, n_8), (n_6, n_7^{\perp}), (sn_9^{\perp}, sn_{10})$ . Elle décrit le pré-réseau de l'exemple 21. Il reste alors à vérifier qu'on a bien défini un réseau de Lambek sans séquence vide, ce qui est immédiat. Il correspond aux démonstrations de Lambek données dans les exemples 5 et 6. L'identification que font les réseaux entre diverses démonstrations du calcul des séquents fait que l'on a moins de possibilités à considérer.

Une question naturelle est alors la complexité de ce genre d'algorithme d'analyse syntaxique. Pour le système moins contraint MLL, la seule restriction est d'obtenir un réseau satisfaisant  $\emptyset\mathcal{A}$  et SAT et alors on sait qu'il y a nécessairement un grand nombre d'étapes: ce problème est NP-complet (Lincoln *et al.* 1992). Par contre la notion de *Tenseur* scindant conduit à des heuristiques efficaces (de Groote Ph. 1995): en effet, on sait a priori qu'il ne peut y avoir de lien axiomes entre les deux cotés d'un tenseur: cela ne suffit pas, mais restreint le nombre de possibilités de manière significative lorsqu'on traite d'exemples concrets. Le calcul intuitionniste ne change rien à ce point de vue.

Pour les calculs de Lambek L, et L\*, par contre, la contrainte d'ordre CYCL est si restrictive qu'on peut penser qu'il en est autrement, mais actuellement, on n'en sait rien. Certains pensent que c'est un problème polynomial, pour les raisons suivantes: on sait que le calcul de Lambek correspond aux grammaires hors-contexte, pour lesquelles la décision est polynomiale. Mais on peut également trouver des arguments contraires: le nombre de manières de placer les axiomes reste exponentiel, et des systèmes voisins ont une complexité exponentielle. Nous pensons que l'étude des réseaux est une bonne manière d'attaquer cette question, quelle qu'en soit la réponse.

## RÉFÉRENCES

- ABRUSCI, V. M. ; FOUQUERÉ, C. ; VAUZEILLES, J. (1996): "Tree adjoining grammar and non-commutative linear logic", in Retoré C. (ed.), pp. 13-17.
- ABRUSCI, V. M. (1991): "Phase semantics and sequent calculus for pure non-commutative classical linear logic", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 56, n° 4, pp. 1403-1451.
- ABRUSCI, V. M. (1995): "Non-commutative proof nets", in Girard J.-Y. *et al.* (eds.), pp. 271-296.
- ASPERTI, A. ; DORE, G. (1994): "Yet another correctness criterion for multiplicative linear logic with mix", in *Logical Foundations of Computer Science*, Springer-Verlag, LNCS volume 813, pp. 34-46.
- ASPERTI, A. (1991): *A linguistic approach to dead-lock*, Rapport technique LIENS 91-15, Dép. Maths et Info, Ecole Normale Supérieure, Paris.
- BECHET, D. ; DE GROOTE, Ph. (1996): "Constructing different phonological bracketings from a proof net", in Retoré C. (ed.), pp. 1-6.
- BELLIN, G. ; SCOTT, P. J. (1994): "On the  $\pi$ -calculus and linear logic", *Theoretical Computer Science*, vol. 135, pp. 11-65.

- CHOMSKY, N. (1963): "Formal properties of grammars", in *Handbook of Mathematical Psychology*, Wiley, New-York, pp. 323-418.
- DALRYMPLE, M. ; LAMPING, J. ; PEREIRA, F. ; SARASWAT, V. (1995): "Linear logic for meaning assembly", in Morrill G. & Oehrle R. (eds.), pp. 75-93.
- DANOS, V. ; REGNIER, L. (1989): "The structure of multiplicatives", *Archive for Mathematical Logic*, vol. 28, pp. 181-203.
- DANOS, V. (1990): La logique linéaire appliquée à l'étude de divers processus de normalisation et principalement du  $\lambda$ -calcul, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.
- DE GROOTE, Ph. ; RETORÉ, C. (1996): "Semantic readings of proof nets", in G.-J. Kruijff ; G. Morrill ; D. Oehrle (eds.), *Formal Grammar*, Actes de la conférence ESSL, Prague, pp. 57-70.
- DE GROOTE, Ph. (1995): "Linear logic with Isabelle: pruning the proof search tree", in *4<sup>th</sup> Workshop on theorem proving with analytic tableaux and related methods*, Springer-Verlag, LNCS/LNAI volume 918, pp.263-277.
- FLEURY, A. ; RETORÉ, C. (1994): "The mix rule", *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 4, n° 2, pp. 273-285.
- FLEURY, A. (1996): La règle d'échange: logique linéaire multiplicative tréssée, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.
- GENTZEN, G. (1934): "Untersuchungen über das logische Schließen I", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176-210 (*Trad. française de R. Feys et J. Ladrière: Recherches sur la déduction logique, PUF, Paris, 1955*).
- GIRARD, J.-Y. ; LAFONT, Y. ; TAYLOR, P. (1988): *Proofs and Types*, Cambridge University Press, *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*.
- GIRARD, J.-Y. ; LAFONT, Y. ; REGNIER, (eds.) (1995): *Advances in Linear Logic*, Cambridge University Press, *London Mathematical Society Lecture Notes*, volume 222.
- GIRARD, J.-Y. ; OKADA, M. ; SCEDROV, A (eds.) (1996): *Linear'96*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 3, Elsevier. (<http://pigeon.elsevier.nl/mcs/tcs/pc/menu.html>).
- GIRARD, J.-Y. (1987): "Linear logic", *Theoretical Computer Science*, vol. 50, n° 1, pp. 1-102.
- GIRARD, J.-Y. (1995): "Linear logic: its syntax and semantics", in Girard J.-Y. *et al.* (eds.), pp. 1-42.
- JOHNSON, M. E. (1996): " Proof nets and the complexity of Processing Center-Embedded Constructions", Rapport technique, Brown University. (communication au colloque *CUNY conference on Human Language Processing*, New York, 1996).
- LAMARCHE, F. (1994), "Proof nets for intuitionistic linear logic: Essential nets", Rapport technique, Imperial College, <http://theory.doc.ic.ac.uk/~gfl>.

- LAMBEK, J. (1958): "The mathematics of sentence structure", *American mathematical monthly*, pp. 154-170.
- LAMBEK, J. (1961): "On the calculus of syntactic types", in Jacobson R. (ed.) *Structure of language and its mathematical aspects*, American Mathematical Society, pp. 166-178.
- LECOMTE, A. ; RETORÉ, C. (1995): "Pomset logic as an alternative categorial grammar", in Morrill G. & Oehrle R. (eds.), pp. 181-196.
- LECOMTE, A. (1994): Modèles logiques en théorie linguistique, Mémoire d'habilitation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- LÉGERET, M.-A. (1996): Algèbres de démonstrations en grammaires catégorielles, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- LINCOLN, P. ; MITCHELL, J. ; SCEDROV, A. ; SHANKAR, N. (1992): "Decision problems for propositional linear logic", *Journal of Pure and Applied Logic*, vol. 56, pp. 239-311.
- MARINGELLI, E. (1996): Grafi e logica lineare: una nuova definizione delle reti dimostrative non commutative, Tesi di laurea, Università di Bari.
- MERENCIANO, J. M. (1996): "Generation as deduction", in Retoré C. (ed.), pp. 77-80.
- MÉTAYER, F. (1994): "Homology of Proof-Nets", *Archive for mathematical logic*, vol. 33, pp. 169-188.
- MOORTGAT, M. (1988): *Categorial Investigations*, Dordrecht, Foris.
- MOORTGAT, M. (1990): "La grammaire catégorielle généralisée: le calcul de Lambek-Gentzen", in Miller P. & Torris T. (éds) *Formalismes syntaxiques pour le traitement automatique du langage naturel*, Hermès, Paris, pp. 127-182.
- MOORTGAT, M. (1996): *Categorial Type Logic*, in van Benthem J. & ter Meulen A. (eds.), *Handbook of Logic and Language*, North-Holland, Amsterdam, chap. 2, pp. 93-177.
- MORRILL, G. ; OEHRLE, R. (eds.) (1995): *Formal Grammar*, Barcelona, Actes de la conférence ESSLLI.
- MORRILL, G. (1994): *Type Logical Grammar*, Kluwer, Dordrecht.
- PENTUS, M. (1993): "Lambek grammars are context-free", in *Logic in Computer Science*, IEEE Computer Society Press, pp. 429-433.
- RETORÉ, C. (ed.) (1996): *Logical Aspects of Computational Linguistics*, CRIN-C.N.R.S. & INRIA-Lorraine, (à paraître dans la série LNCS/LNAI, Springer-Verlag).
- RETORÉ, C. (1996): "Perfect matchings and series-parallel graphs: multiplicative proof nets as R&B-graphs", in Girard J.-Y. *et al.* (eds.) .
- RETORÉ, C. (1997): "A semantical characterisation of the correctness of a proof net", *Mathematical Structures in Computer Science* (à paraître, n° spécial LDPL'95).
- ROORDA, D. (1991): Resource logic: proof theoretical investigations, Thèse de PhD, FWI, Universiteit van Amsterdam.

- SCHENA, I. (1996): "Pomset logic and discontinuity in natural language", in Retoré C. (ed.), pp. 7-12.
- TROELSTRA, A. S. (1992): *Lectures on Linear Logic*, Cambridge University Press, *CSLI Lecture Notes*, volume 29.
- VAN BENTHEM, J. (1991): *Language in action: Categories, Lambdas, and Dynamic Logic*, North-Holland, *Studies in logic and the foundations of mathematics*, volume 130.
- VAN DE WIELE, J. (1990): "Logique linéaire intuitionniste et polarités", manuscrit, Université Paris 7.
- YETTER, D. N. (1990): "Quantales and (non-commutative) linear logic", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 55, pp. 41-64.
- ZIELONKA, W. (1982): "Axiomatizability of the Adjukiewicz-Lambek calculus by means of cancellation schemes", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, vol. 28, pp. 539-548.

## ANNEXE 1

### DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 32

On procède par induction sur  $\#E + n$ , en notant que si une classe n'a qu'un élément le résultat est évident — c'est notamment le cas si  $n = 2$ .

*Il existe  $z$  tel que  $\psi(z) = \sigma(z)$*  Soit  $z$  tel que  $\#[z, \sigma(z)[$  soit minimal, et montrons que  $\#[z, \sigma(z)[ = 0$  ce qui signifie que  $\psi(z) = \sigma(z)$ . Soit  $y \in ]z, \sigma(z)[$ . Comme  $\sigma$  est compatible avec  $\psi$ ,  $\sigma(y) \in ]z, \sigma(z)[$ . L'un des deux intervalles suivants  $]y, \sigma(y)[$  ou  $] \sigma(y), \sigma(\sigma(y)) = y[$  est inclus dans  $]z, \sigma(z)[$ , et puisqu'aucun d'eux ne contient  $y$ , leur cardinalité est strictement inférieure à celle de  $\#[z, \sigma(z)[$ , contradiction.

Considérons maintenant un tel  $z$  tel que  $\psi(z) = \sigma(z)$  et soit  $i$  l'indice tel que  $z \in E_i$ . Trois cas se présentent :

$\sigma(z) \in E_i$  et  $E_i = z, \sigma(z)$  Dans ce cas  $E_i$  est seul dans sa classe, et le résultat est clair.

$\sigma(z) \in E_i$  et  $E_i = \dots, z, \sigma(z), \dots$  Dans ce cas, substituons  $E_i \setminus \{z, \sigma(z)\}$  à  $E_i$ , et restreignons  $\sigma$  et  $\psi$  à  $E \setminus \{z, \sigma(z)\}$ . L'hypothèse d'induction s'applique et comme  $\Sigma^*$  est inchangée, les  $D$  et  $G$  obtenus sur le problème réduit conviennent.

$\sigma(z) \notin E_i$ . Dans ce cas  $\sigma(z)$  est le premier symbole de  $E_{i+1} = \Psi(E_i)$ . On considère le problème réduit suivant :

soit  $\Psi'$  permutation circulaire  $\triangleright E_1; \dots; E_{i-1}; E_{i(i+1)}; E_{i+2}; \dots; E_n \triangleright$  où  $E_{i(i+1)}$  est la suite de symboles définie par  $E_i, E_j$

On remarque que  $E$ ,  $\psi$  et  $\sigma$  sont inchangés, ce qui assure que  $\sigma$  est compatible avec  $\psi$ . Comme on avait  $E_i \Sigma E_{i+1}$  la relation d'équivalence  $\Sigma'^*$  de ce problème réduit a aussi exactement deux classes.

On retrouve ainsi un problème similaire dans lequel  $\#M' = n - 1$ . L'hypothèse d'induction fournit donc  $G'$  et  $D'$  tel que  $G' = [G', D'[$  et  $D' = [D, G'[$ . On peut donc prendre  $G = G'$  et  $D = D'$  — si toutefois  $G'$  (resp.  $D'$ ) est  $E_{i(i+1)}$ , alors on prendra  $G$  (resp.  $D$ ) égal à  $E_i$ .

## ANNEXE 2

### DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 36

Les implications  $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$  et  $3 \Rightarrow 4$  sont évidentes.

On montre  $4 \Rightarrow 1$  par induction sur le nombre de liens de  $\Pi$ , qui est égal au nombre de règles logiques et d'axiomes de toute démonstration du calcul des séquents correspondant à  $\Pi$ . Considérons une démonstration  $\Pi^*$  correspondant à  $\Pi$ , dont tous les séquents contiennent au moins deux formules. On peut toujours supposer que  $\Pi^*$  ne se termine pas par une règle d'échange. En effet, si  $\Pi^*$  est une séquentialisation de  $\Pi$  dont tous les séquents ont au moins deux conclusions,  $\Pi^*$  privé de cette dernière règle unaire, est aussi une séquentialisation de  $\Pi$  dont tous les séquents ont au moins deux conclusions.

Si la dernière règle de  $\Pi^*$  est un axiome,  $\Pi^*$  se réduit à cet axiome, — qui contient bien deux formules — et  $\Pi$  est réduit à un lien *Axiome*. Dans ce cas le seul sous-préréseau de  $\Pi$  est  $\Pi$  tout entier, qui a deux conclusions.

Si la dernière règle de  $\Pi^*$  est une règle à deux prémisses appliquée à deux démonstrations  $\Pi'^*$  et  $\Pi''^*$ , le lien de  $\Pi$  qui lui correspond est un *Tenseur*, qui est final et scindant :  $\Pi$  s'obtient en connectant deux réseaux  $\Pi'$  et  $\Pi''$  plus petits que  $\Pi$ . Comme  $\Pi'$  et  $\Pi''$  admettent  $\Pi'^*$  et  $\Pi''^*$  pour séquentialisations respectives, et que celles-ci sont des sous-démonstrations de  $\Pi^*$ , ce sont des démonstrations dont tous les séquents contiennent deux formules, et on peut appliquer l'hypothèse d'induction à  $\Pi'$  et à  $\Pi''$  : tout sous-préréseau de  $\Pi'$  ou de  $\Pi''$  a au moins deux conclusions. Maintenant, étant donné un sous-préréseau  $s\Pi$  de  $\Pi$ , son intersection avec  $\Pi'$  (resp.  $\Pi''$ ) est un sous-préréseau de  $\Pi'$  (resp.  $\Pi''$ ) qui a  $p > 1$  (resp.  $q > 1$ ) conclusions. Si le lien *Tenseur* fait partie de  $s\Pi$  le nombre de conclusions de  $s\Pi$  est  $p + q - 1 > 1$ , et sinon, le nombre de conclusions de  $s\Pi$  est  $p + q > 1$ . Dans tous les cas  $\Pi$  satisfait ÉTOILE.

Si la dernière règle de  $\Pi^*$  est une règle à une prémisse appliquée à une démonstration  $\Pi'^*$ , le lien de  $\Pi$  qui lui correspond est un *Par*, qui est final. Appelons  $\Pi'$  le réseau obtenu à partir de  $\Pi$  par suppression de ce lien. Le réseau  $\Pi'$  admet  $\Pi'^*$  pour séquentialisation, et a moins de liens que  $\Pi$ . On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à  $\Pi'$  : tout sous-préréseau de  $\Pi'$  a au moins deux conclusions. Maintenant, étant donné un sous-préréseau  $s\Pi$  de  $\Pi$ , son intersection  $s\Pi'$  avec  $\Pi'$  a au moins deux conclusions. Il est impossible que  $s\Pi'$  ait  $X$  et  $Y$  pour seules conclusions. En effet, on sait que  $\Pi$  a au moins deux conclusions : il a donc une conclusion  $Z$  autre que  $X \wp Y$ . Comme  $\Pi$  est connexe, il existe un chemin de  $s\Pi'$  à cet autre conclusion, et même un chemin qui, à part son premier sommet est extérieur à  $\Pi'$ . Il y a donc une arête de  $\Pi$ , incidente à  $\Pi'$  qui commence ce chemin. On notera que ce n'est ni l'arête  $R$  sous  $X$ , ni celle sous  $Y$ , qui obligent à repasser par  $s\Pi'$ . Or la seule façon de sortir d'un sous-préréseau est de le quitter par l'une de ces conclusions :  $s\Pi'$  a donc une conclusion autre que  $X$  ou  $Y$ .

Appelons  $p$  le nombre de conclusions de  $s\Pi'$ . Si  $X$  et  $Y$  sont parmi les  $p$  conclusions de  $s\Pi'$ , alors, comme nous l'avons vu, on a  $p > 2$ . Par conséquent, soit  $s\Pi$  a  $p > 2$  conclusions (s'il n'a pas  $X \wp Y$  pour conclusion), soit  $s\Pi$  a  $p - 1 > 1$  conclusions (s'il a  $X \wp Y$  pour conclusion). Si  $X$  ou  $Y$  n'est pas conclusion de  $s\Pi'$ , alors  $X \wp Y$  n'est pas conclusion de  $s\Pi$ , et  $s\Pi$  et  $s\Pi'$  ont le même nombre de conclusions  $p > 1$ .

Dans tous les cas,  $s\Pi$  a au moins deux conclusions.