

Indications pour résoudre le problème sur la "non-non" traduction de Gödel-Kolmogorov entre logique classique (NK) et logique intuitionniste (NJ)

Richard Moot and Christian Retoré

29 octobre 2007

HI désigne l'hypothèse d'induction.

1 Lemme : $\neg\neg F^{\neg\neg} \vdash^{LJ} F^{\neg\neg}$

Par induction sur les formules obtenues par la traduction $\neg\neg$.

1.1 \rightarrow

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A^{\neg\neg}]^3 \quad [A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}]^1}{B^{\neg\neg}} \rightarrow_e \quad [\neg B^{\neg\neg}]^2}{\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg})} \rightarrow_e}{\frac{\frac{\perp}{\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg})} \rightarrow_i (1)}{\neg\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg})} \rightarrow_e} \rightarrow_e \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg\neg B^{\neg\neg}} \rightarrow_i (2)}{\vdots HI} \\
 \frac{B^{\neg\neg}}{A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}} \rightarrow_i (3)
 \end{array}$$

2 Théorème $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{LJ} F^{\neg\neg}$ ssi $\Gamma \vdash^{LK} F$

2.1 $\Gamma \vdash^{LK} F \Rightarrow \Gamma^{\neg\neg} \vdash^{LJ} F^{\neg\neg}$

Cela se montre par induction sur la preuve en LK. Notez qu'on construit toujours une preuve en LJ avec les mêmes occurrences de variables libres.

2.1.1 \vee

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \quad \Delta \quad [A]^k \quad \Theta \quad [B]^k \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 A \vee B \quad C \quad C \quad \vee_e \\
 \hline
 C
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad
 \begin{array}{c}
 \Delta^{\neg\neg} \quad [A^{\neg\neg}]^k \quad \Theta^{\neg\neg} \quad [B^{\neg\neg}]^k \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 [A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}]^l \quad C^{\neg\neg} \quad C^{\neg\neg} \quad \vee_e \\
 \hline
 C^{\neg\neg}
 \end{array}
 \xrightarrow{[-C^{\neg\neg}]^m \rightarrow_e}
 \begin{array}{c}
 \Gamma^{\neg\neg} \\
 \vdots \quad HI \\
 \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \rightarrow_e
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \perp \\
 \hline
 \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \rightarrow_i(l)
 \end{array}
 \xrightarrow{[-C^{\neg\neg}]^m \rightarrow_e}
 \begin{array}{c}
 \perp \\
 \hline
 \neg\neg C^{\neg\neg} \rightarrow_i(m) \\
 \vdots \quad Lemme \\
 C^{\neg\neg}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \\
 A \\
 \hline
 A \vee B \quad \vee_i
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad
 \begin{array}{c}
 \Gamma^{\neg\neg} \\
 \vdots \quad HI \\
 A^{\neg\neg} \\
 \hline
 A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg} \quad \vee_i \quad [\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg})]^l \rightarrow_e \\
 \hline
 \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \rightarrow_i(l)
 \end{array}$$