



Les quantificateurs : **une histoire entre** **logique, mathématiques et linguistique**

Loïc Allègre, Christian Retoré

LIRMM CNRS & Univ. Montpellier

XXVI^e colloque de la commission Inter-IREM

Épistémologie et Histoire des mathématiques

MATHÉMATIQUES ET LANGUAGE(S)



Avant propos

Diapos relues et réfs accessibles ajoutées à la fin.

Un grand merci à Pierre Ageron de l'invitation!

Un peu lassé de présenter ici et là
les grammaires de Lambek
et de la sémantique de Montague...

... merci d'avance de nous aider
à rectifier les erreurs historiques.

Merci à JL Gastaldi et à N Saby de leurs conseils.



A L'Antiquité et la scholastique



A.1. Aristote et sa syllogistique

IVe BC (Thalès VIle BC, Pythagore Ve BC)

Logique: à étudier en premier

pour donner aux autres types de raisonnements la rigueur du raisonnement mathématique.

A Tout S est P. Universelle affirmative

I Au moins un S est P. Existentielle affirmative

E Aucun S n'est P. Universelle négative.

O Tous les S ne sont pas P. Existentielle négative.

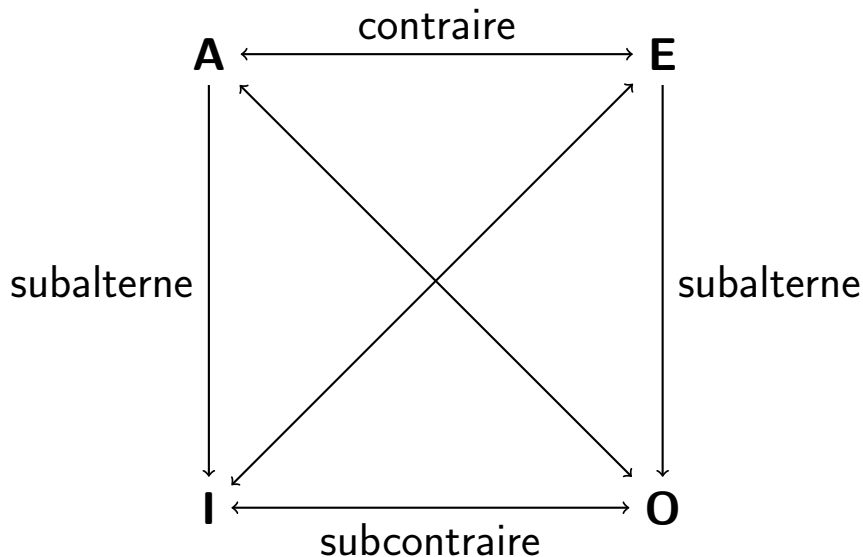
O jamais lexicalisé dans aucune langue connue

O souvent reformulé en certains S ne sont pas P (focus différent)

forme restreinte de quantification

lien avec les maths d'après Aristote: (Barbara)

A.2. Carré des oppositions (Aristote, Boèce)





A.3. Syllogisme sur les énoncés quantifiés

bArBarA (ex. maths d'Aristote):

Tout S est P

Tout P est Q

Tout S est Q

Les principes (non contradiction, tiers exclus, ...)
sans rapport avec la quantification.

Peri Hermeneias davantage tournée vers la philo du
langage (sens des catégories grammaticales) et vers la
logique modale (possible, futur)



A.4. Scholastique: une continuation des travaux d'Aristote

classification des syllogismes suivant

- rôle du terme médian,
- ordre des prémisses...

Questions subtiles sur la relation concept/extension:

un cheval mort est-il un cheval?

si une maladie fait disparaître tous les grands chiens, le concept de chien en est-il affecté?



A.5. Querelle des universaux (cf. généralité en maths?)

le nominalisme, selon lequel le concept vient après la chose (post rem), les universaux ne sont que des mots

le réalisme des universaux, selon lequel le concept précède la chose (ante rem), les universaux sont vraiment des choses (res), des réalités qui existent hors de l'esprit humain, avant les êtres particuliers

le conceptualisme, selon lequel le concept est dans la chose (in re), les universaux sont en réalité des concepts (intellectus, conceptus), des constructions mentales mais en rapport avec la réalité.



A.6. Quantification en maths: la généralité

Aucun lien avec les maths pendant plus de 20 (!) siècles
triangle quelconque: la construction géométrique et
donc la propriété valent donc de tout triangle



B XVIIIe et XIXe siècles



B.1. Le langage des mathématiques

calcul différentiel

géométrie

grandeur quelconque : simplifiable ?

$$\lambda^2/\lambda \rightarrow \lambda \text{ et } \lambda\epsilon/\lambda \rightarrow \epsilon ?$$

$$\lambda/\lambda^2 \rightarrow +\infty \text{ et } \lambda/\epsilon\lambda \rightarrow +\infty ?$$

i avec $i^2 = -1$ fait-il partie des grandeurs ?

$\mathbb{R}$, Weierstrass : besoin de quantificateurs
(et d'un domaine de quantification):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = l : \forall \alpha \exists \eta \forall x \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \alpha$$



B.2. La quantification avant Frege

De Morgan / Boole

inspiré du calcul des probabilités

$p(x_i) = p_i$ valeur de vérité ou proba?

Domaine: $(x_i)_{i \in I}$

$\prod_{i \in I} p_i$: "valeur numérique" de $\forall i \in I. p(x_i)$

$$\begin{aligned} &(\forall x (I(x) \Rightarrow F(x) \vee H(x))) \\ &\Rightarrow (\forall x. I(x) \Rightarrow F(x)) \vee (\forall x. I(x) \Rightarrow H(x)) \end{aligned}$$



B.3. (Peirce,) Frege, Hilbert : la solution pérenne

La logique se mathématise et on étudie la logique des mathématiques qui devient la logique mathématique.

$$\exists x P(x) = \neg \forall \neg x P(x)$$

Un seul univers du discours, pas de sortes, types, etc.

A Tout S est P. $\forall x. S(x) \Rightarrow P(x)$

I Au moins un S est P. $\exists x. S(x) \wedge P(x)$

E Aucun S n'est P. $\forall x. S(x) \wedge \neg P(x)$

O Tous les S ne sont pas P. $\neg \forall x. S(x) \Rightarrow P(x)$

B.4. Logique du premier ordre: axiomes

- axiomes propres (par ex. axiome groupe)

- tautologies propositionnelles

$$S : ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

$$K : p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$\perp \Rightarrow p$$

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow p)$$

- axiomes des quantificateurs

$$(\neg \forall x. \neg G) \Rightarrow (\exists x. G) \text{ et } (\exists x. G) \Rightarrow (\neg \forall x. \neg G)$$

$$(\forall x. H \Rightarrow G) \Rightarrow (H \Rightarrow \forall x. G) \text{ sans } x \text{ dans } H$$

$$(\forall x. G[x]) \Rightarrow G[t/x] \text{ (pas de quantification } \exists z/\forall z \text{ dans } G \text{ avec } z \text{ variable de } t)$$



B.5. Logique du premier ordre: règles

- modus ponens

$$A \Rightarrow B$$

$$A$$

$$B$$

- généralisation (Aristote: abstraction):

$$\frac{G[x]}{\forall x G[x]}$$



B.6. Logique du premier ordre: modèles

On se donne un ensemble où varient les variables quantifiées. Tout énoncé clos devient vrai ou faux.

Model Existence Lemma: une théorie Th est cohérente (sans contradiction, ne démontre pas $\perp$) si et seulement si Th admet un modèle (où les axiomes de Th sont tous vrais)



B.7. Théorie des modèles

Ordre dense sans points extrémaux:

$$\forall x \exists y. x < y$$

$$\forall x \exists y. y < x$$

$$\forall x. \neg x < x$$

$$\forall xyz. (x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$$

$$\forall xy. x < y \Rightarrow \exists z. x < z \wedge z < y$$

Un seul modèle dénombrable à isomorphisme près $\mathbb{Q}$

Groupe:

$$\forall xyz. ((x.y).z) = (x.(y.z))$$

$$\exists e \forall x (x.e) = x \wedge (e.x) = x$$

$$\forall x \exists x' (x.x') = e \wedge (x'.x) = e$$

B.8. Arithmétique de Peano

$$\forall x \quad \neg(s(x) = 0)$$

$$\forall x \quad (x = 0 \vee \exists y (x = s(y)))$$

$$\forall x \quad \forall y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x \quad (x + 0 = x)$$

$$\forall x \forall y \quad (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\forall x \quad (x \cdot 0 = 0)$$

$$\forall x \forall y \quad (x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x)$$

Pour toute formule $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$

à $n + 1$ variables libres,

$$\forall x_1 \dots \forall x_n$$

$$[\phi(0, x_1, \dots, x_n)$$

$$\wedge \forall y. \phi(y, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \phi(y + 1, x_1, \dots, x_n)]$$

$$\Rightarrow \forall x. \phi(x, x_1, \dots, x_n)$$



B.9. Théorèmes essentiels : complétude, compacité

MEL $\Leftrightarrow$ Complétude: ϕ démontrable (dans Th) si et seulement si ϕ vraie dans tous les modèles (de Th).

Compacité: si toute partie finie d'une théorie (infinie) Th admet un modèle alors Th admet un modèle (tous les axiomes de Th sont simultanément vrais).

Assez évident via MEL (sinon ultraproducts): si Th n'admet pas de modèle alors Th incohérente, $Th \vdash \perp$ et les preuves étant FINIES, $Th_f \vdash \perp$, $Th_f \vdash \perp$, Th_f n'a pas de modèle.

Ex : rares de théories complètes ($Th \vdash \phi$ ou $Th \vdash \neg\phi$ pour tout ϕ) et donc décidables (Post):

- ordre dense sans points extrémaux
- géométrie euclidienne



B.10. Désillusion de Hilbert: Gödel

L'arithmétique admet des modèles non standard:
 $\mathbb{N}$ usuel suivi de $\mathbb{Q}$ copies de $\mathbb{Z}$

Moralité: la logique du premier ordre ne permet pas de saisir "nos entiers".

La quantification du second ordre (cf infra) permet de capturer "nos entiers" (le plus petit ensemble contenant 0 et clos par successeur, mais alors on n'a plus les résultats de complétude et de compacité).



B.11. Frege, Hilbert : quelques difficultés

Exemple concret: F est un sous espace vectoriel de E si $\forall \lambda \in K, \forall u \in F$ on a $\lambda u \in F...$

Logique multisorte (cf. Krivine et Kreisel 1967)

Théorie des ensembles? si votre espace est sur $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$ est définissable (puisque $\mathbb{N}$ l'est).... Possible mais personne ne va le faire, et personne ne comprendrait ces écritures ;-)



C Extensions et variantes au XXe (et XXIe?) siècle



C.1. Intuitionnisme

$\vdash A \vee B$ alors $\vdash A$ ou $\vdash B$

si $\vdash \exists x A[x]$ alors il existe un terme t tel que $\vdash A[t]$

Paradoxe du buveur:

classique: OK, intuitionniste NON

$\exists z.(B(z) \Rightarrow (\forall x B(x)))$

C.2. Second ordre (égalité de Leibniz)

Syntaxe : variables de prédicats (avec arité), sur lesquelles on peut quantifier :

$$\forall X(_).X(paul)$$

ou

$$N(n) = \forall X(_).X(0) \wedge (\forall y.X(y) \Rightarrow X(y+1)) \Rightarrow \forall n.X(n)$$

Pb sémantique : $Z(., .) \subset D^2$ D :domaine).

Pas de complétude. Complétude $\Rightarrow$ Compacité

$G_1 : \forall F(., .)$ *F* fonction $\wedge$ *F* injective $\Rightarrow$ *F* surjective

$G_n = \exists x_1 \cdots x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$ (au moins n éléments)

Toute partie finie des $(G_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ admet un modèle mais

PAS $(G_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Pas de compacité, pas de complétude.



C.3. Epsilon/Tau

La "généralité" (celle des "triangles quelconques") revient via Hilbert (et Ackermann): ramener une propriété/ensemble à un individu représentatif

- Russell : $\iota_x \text{Roi_de_France}(x) = \text{"le" roi de France}$ (existence, unicité)
- Hilbert : $\varepsilon_x P(x) = \text{un individu ayant la propriété } P$ (s'il en existe)
- Opérateur dual $\tau_x P(x) = \varepsilon_x \neg P(x)$



C.4. Epsilon/Tau : preuves

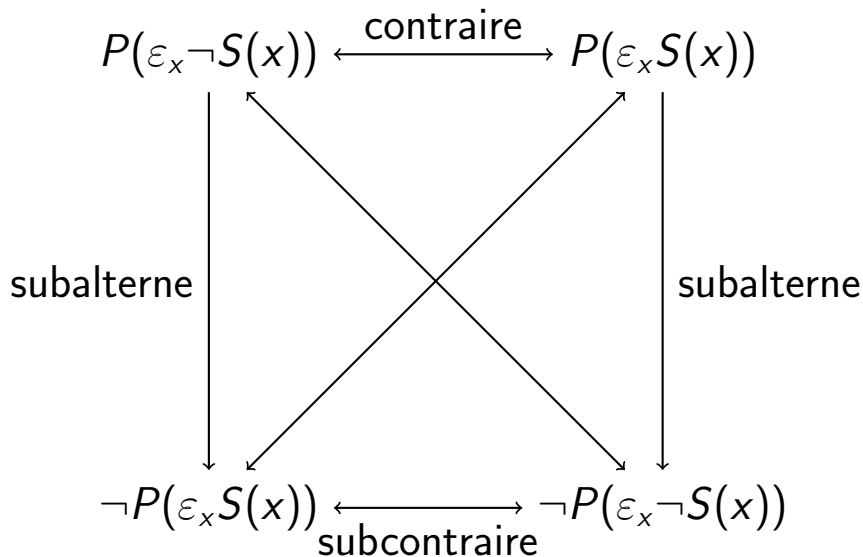
- Axiomes ε/τ :

- $P(t) \implies P(\varepsilon_x P(x))$

- $P(\tau_x P(x)) \implies P(t)$

- Remplacement des quantificateurs usuels :
 $P(\varepsilon_x P(x)) \iff \exists x P(x)$
- Epsilon-substitution : cohérence de l'arithmétique (Ackermann, 1940)

C.5. Carré d'oppositions, revisité





C.6. Epsilon/Tau : sémantique ?

- Moins évidente
- Intuition : ε = opérateur de choix
- Interprétation par une fonction de choix φ :

$$\mathcal{M}, \varphi \models P(\varepsilon_x Q(x))$$

ssi

$$\mathcal{M} \models P(\varphi(\{a \in \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models Q(a)\}))$$

- Modèles assez peu standards
- Extensionnalité : $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \varepsilon_x A = \varepsilon_x B$?



C.7. Quantificateurs généralisés, côté théorie des modèles

- Mostowski (1957), puis Lindström (1966) :
généralisation de la notion de quantificateur de Frege
- Dans un modèle donné :
 - Prédicat $\rightarrow$ relation sur des individus
 - Quantificateur $\rightarrow$ relation sur des relations



C.8. Quantificateurs généralisés, côté théorie des modèles

- Quantificateur (n -aire) = fonction qui à tout modèle $\mathcal{M}$ associe une relation n -aire $Q^{\mathcal{M}}$ sur les relations sur $\mathcal{M}$.
- Toute relation définit (dans un modèle donné) un quantificateur :
 - $\mathcal{M} \models \exists x P(x)$ ssi $P^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$
 - $\mathcal{M} \models Q^{\geq x}[A(x), B(x)]$ ssi $|A^{\mathcal{M}}| \geq |B^{\mathcal{M}}|$
 - $\mathcal{M} \models Q^w_{xy}[A(x), R(x, y)]$ ssi $R^{\mathcal{M}}$ est un ordre bien fondé sur $A^{\mathcal{M}}$
- Notion assez naturelle en théorie des modèles



C.9. Quantificateurs généralisés, côté théorie des modèles

- Langage très riche, trop ?
 - Théorie des ensembles "dissimulée" dans la définition d'un quantificateur :

$$Q : \mathcal{M} \mapsto \begin{cases} \forall^{\mathcal{M}} & \text{si } \mathcal{M} \text{ infini} \\ \exists^{\mathcal{M}} & \text{sinon} \end{cases}$$

- Systèmes/règles de preuves ? Pas dans le cas général
 - Propriétés syntaxiques (e.g. formes prénexes) ? Certaines classes de quantificateurs seulement
- Intérêt pour les mathématiques ? Limité : préférence pour la quantification d'ordre supérieur

C.10. Quantificateurs de Henkin

- Henkin (1959) : Ordre partiel des quantificateurs

$$\forall x \exists y \forall u \exists v F(x, y, u, v)$$

$$\left(\begin{array}{cc} \forall x & \exists y \\ \forall u & \exists v \end{array} \right) F(x, y, u, v)$$

- Equivalent au fragment existentiel du second ordre: fonctions de Skolem

$$\exists f \exists g \forall x \forall u F(x, f(x), u, g(u))$$

- Continuations : Independence-friendly Logic et sémantique des jeux (Hintikka), Team Logic (Väänänen)



D 1960-? La quantification en langage naturel (et dans l'enseignement des maths)



D.1. Montague

The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English, 1970

Analyse syntaxique et sémantique du langage naturel

- Individus = ensemble des propriétés vraies de cet individu
- Prédicats vus en extension (ou comme des fonctions d'individus en lambda-calcul)



D.2. Quantificateurs généralisés en langage naturel

- Formalisme apte à modéliser la richesse de la quantification du langage
- Conceptuellement proche de la sémantique de Montague (fonctions/rerelations d'ordre supérieur) :

$$Tous_x[A(x), B(x)] \iff A \subseteq B$$

$$\lambda A. \lambda B. \forall (\lambda x. (A(x) \rightarrow B(x)))$$

- Problèmes : syntaxe moins fidèle au langage, compositionnalité, déterminants vagues, etc.

$$Plupart_x[Chat(x), Gris(x)] ?$$



D.3. Génériques: epsilon/tau

- Représentation des descriptions définies/indéfinies
 - $\iota_x Roi(x)$: "le" roi
 - $\varepsilon_x Roi(x)$: "un" roi
- Plus fidèles à la syntaxe des LN :
 - "Certains chats sont gris" :

$$Gris(\varepsilon_x Chat(x))$$

- Quantificateurs généralisés :

$$Certains_x[Chat(x), Gris(x)]$$



D.4. Epsilon/tau, déterminants et contextes

- Von Heusinger (1993), puis Mints, Sarenac : calcul epsilon indexé.
- $\varepsilon/\tau/\iota$: opérateurs de choix (défini ou indéfini)
- Choix dépendant du contexte i : $\varepsilon_i xP(x)$, interprété par une fonction de choix f_i
- Toujours les problèmes de modèles : complétude, mais sous conditions (Leiß, 2017)



E La quantification universelle en français ... et (donc) dans l'enseignement des maths



E.1. Formulation

Tous les

Chaque

Tout (un, la/le, les) générique



E.2. Tous les A ont la propriété P .

Variante grammaticale: *Les A ont tous* la propriété P .

Rare mais moins que "chaque" et "tout".

FOCUS: ENSEMBLE A est "recouvert" par l'extension de la propriété P , le domaine où $P(_)$ est vraie.

A est un ensemble saillant dans le contexte énonciatif

Ensuite, nous sommes tous restés pour le pot qui a suivi.

Tous les couples d'entiers sont ainsi numérotés par

Les couples d'entiers reçoivent tous un numéro de
cette fonction $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(La fonction (bijection de Cantor) n'oublie pas de couple
d'entiers.)

"Les" tout seul peut avoir de le sens de "tous les".

Les enfants se sont (tous) rapidement endormis.



E.3. Tout: très rare

Droit

Maths

... très rare dans les corpus autres.



E.4. Tout / Chaque

Corpus mathématique (cours L1 L2 maths)

ensemble fini "chaque"

entiers "tout" dans les énoncés de théorèmes, très rarement "chaque", dans les démonstrations, plutôt "tout" mais aussi "chaque"

réels "tout" dans les énoncés de théorèmes, jamais "chaque"; dans les démonstrations, "tout" et parfois "chaque"

fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, par ex. fonctions continues: jamais "chaque" ni dans les énoncés de théorèmes ni dans les preuves



E.5. Tout / Chaque

Travail avec Alda Mari IJN/ENS

chaque: domaine bien défini, pas d'exception

justification inspection de chaque individu du domaine

tout: domaine pas forcément bien défini,
tolère les exceptions

justication par un raisonnement sur un membre quel-
conque de la classe considérée



E.6. Tout / Chaque

Différence de justification/ preuve
omega règle (chaque)

$$\frac{P(0) \quad P(1) \quad P(2) \quad \dots}{\forall x \, P(x)}$$

règle de généralisation d'abstraction, tau

$$\frac{P(x)}{\forall x \, P(x)}$$

$$\frac{P(\tau_x P(x))}{\forall x \, P(x)}$$



E.7. Un S: $\exists S$ ou $\forall S$?

UN étudiant te cherchait, il est reparti.

Si UN paysan possède UN âne
alors il le bât.

Si UN nombre est divisible par 9,
alors il est divisible par 3.

Video YouTube sur la récurrence...
pour "aider" les lycéens ;-)

$$\exists k P(k) \Rightarrow P(k + 1)$$



E.8. Conclusions et perspectives

Modèles preuves complétude pour epsilon/tau

Quantification *in situ* et ambiguë

Un rond est relié à chaque carré

$\exists r \in R \forall c \in C \ r - c$ ou $\forall c \in C \exists r \in R \ r - c$???

$(\epsilon_x R(x)) - (\tau_x C(x))$ exprime les deux!

x réel "générique"

x ne satisfait aucune propriété de mesure nulle

Les français vont en vacances à la mer.

Analyse d'énoncés fréquents mais difficiles à interpréter:

La plupart des français vont en vacances à la mer.

La plupart des français qui vont en vacances
vont en vacances à la mer.

*If **all** roads lead to Rome, **most** segments of the transportation system lead to Roma Termini!* (Blog: Ron in Rome)



E.9. Quelques références 1/4

Histoire générale de la logique,
plutôt pour philosophes, dont des passages portent sur la les quantificateurs
The Development of Logic. By William Kneale and Martha Kneale. (Clarendon Press: Oxford University Press. 1986).

Un peu de logique du premier ordre (FOL), assez accessible

Côté philo:

François Rivenc Introduction à la logique Payot 2020.

Côté maths:

La logique pas à pas. Jacques Duparc EPFL Press, Lausanne, 2015

Théorème d'incomplétude de Gödel Une petite vidéo facile à suivre mais sans
erreur: <https://youtu.be/82j0F4Q6gBU>

Sur les modèles de l'arithmétique avec des entiers infinis: https://en.wikipedia.org/wiki/Non-standard_model_of_arithmetic



E.10. Quelques références 2/4

Quantificateurs généralisés

Peters, S., Westerståhl, D. : Quantifiers in Language and Logic. Clarendon Press, 2006

<https://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/>

Barwise, J., Cooper, R. : Generalized quantifiers and natural language. Linguistics and Philosophy 4,159–219, 1981

Szymanik, J.: Quantifiers and Cognition: Logical and Computational Perspectives, Studies in Linguistics and Philosophy, vol. 96. Springer International Publishing, 2016



E.11. Quelques références 3/4

Epsilon/Tau

Hilbert, D., Bernays, P. : Grundlagen der Mathematik, 1934

Stanford Encyclopedia of Philosophy: <https://plato.stanford.edu/entries/epsilon-calculus/>

Internet Encyclopedia of Philosophy: <https://iep.utm.edu/ep-calc/>

Stergios Chatzikyriakidis Fabio Pasquali Christian Retoré From logical and linguistic generics to Hilbert's tau and epsilon quantifiers Journal of Logics and their applications 4(2) 2017 pp. 231–255

Fabio Pasquali Christian Retoré Aristotle square of opposition in the light of Hilbert's epsilon and tau quantifiers In D. Sfendoni-Mentzou ARISTOTLE 2400 years world congress. pp. 829-834, University of Thessaloniki ISBN 978-960-243-716-2, 2019. <https://hal.science/hal-04994889v1>

Zach, R. : Semantics and Proof Theory of the Epsilon Calculus. In : Logic and Its Applications, vol.10119, pp. 27–47. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2017



E.12. Quelques références 4/4

Quantification universelle en français

Kleiber G., 2011, La quantification universelle en trio : tous les, chaque et tout, Studii de lingvistică, 1, p. 139-157.

Mari, A. et Retoré, C. (2016). Conditions d'assertion de chaque et de tout et règles de déduction du quantificateur universel. Travaux de linguistique, 72(1), 89-106. <https://doi.org/10.3917/tl.072.0089>