La quantification en logique et en linguistique

Christian Retoré
(Université de Bordeaux, LaBRI & INRIA)

Séminaire méthodes formelles

Vendredi 14 janvier 2011

Table des matières

Première partie

Quantificateurs usuels en logique classique

1. Historique

Une affaire classée ?

– Un sujet très ancien (Aristote, Avicenne, scolastique,...)
  preuves (finies)

– Solution "définitive" : Frege, Hilbert, Russell ....
  ensembles, modèles (infinis)

Mais aujourd'hui :

– Informatique / Logique Intituitonniste

– Actualité en TAL et en sciences cognitives

– Beaucoup de questions, peu de réponses

2. Préjugés en linguistique informatique

D'aucuns disent que la quantification est...

– rare

– sans intérêt pratique

– difficile à modéliser (ça, c'est peut être vrai ;-)

3. Données : «*il existe*»

Le «*il existe*» est très fréquent....
Il est introduit pour une sorte, avec un prédicat par

(1) quelqu'un : quelqu'un dort

(2) quelque chose : Pierre photographie quelque chose

Il arrive souvent aussi avec deux propriétés (restriction, prédicat)

(3) un : un étudiant dort
= quelqu'un qui dort est étudiant (? point de vue)

(4) certains : certains étudiants ont raté (au moins deux ?)

DRT « Théorie des représentations discursives » organise le discours en suivant l'introduction de référents de discours par des existentiels.

4. Données : «*pour tout*»

Le «*pour tout*» est moins fréquent, mais on en trouve : y compris en dehors des sciences et sur des ensembles infinis :
porte sur 2 ou 1 propriétés

(5) 1 prop. générique «*quiconque*»

(6) 2 prop. générique «*tout, un,*»

(7) 2 prop. générique «*chaque, tous les,*»

(8) 1 prop., accidentel «*chacun*» *examples*

5. Données : «*pour tout*»

(9) La CNIL envoie à tous les enseignants d'histoire-géographie [...] une édition spéciale de l'actu, le journal des 14-18 ans [...]

(10) ...analyse fine des sons complexes, indispensable à tout musicien....

(11) Par exemple, tous les atomes d'hydrogène ne comptent qu'un seul proton,...

(12) Toutes les étoiles naissent de la même manière.

(13) Toute suggestion est la bienvenue.

6. Un troisième coin du carré d'Aristote

Existentielle négative

(14) Nul n'est Père Noël.

(15) Personne n'est venu.

Ici encore, certaines formulation se font avec la restriction et d'autres non.

– 1 propriétés Personne Nul Aucun

– 2 propriétés Aucun Nul Rien

7. Le dernier coin : l'univrselle négative

Universelle négative qui peut se formuler de deux manières quasi opposées,

– Tous les étudiants ne sont pas admis.

– Certains étudiants ne sont pas admis.

La première forme « *Tous ... ne ... pas* » est fortement ambigüe ; elle est parfois comprise comme « *Aucun ... ne ...* ».

On notera que l'universelle négative n'est pas lexicalisée : aucun mot ne signifie *pas tous*, et nous ne connaissons pas de langues dans lesquelles cette forme de quantification soit lexicalisée (tandis que l'existentielle négative est lexicalisée).

8. Quantifications mathématiques : $\exists, \forall$

Comment démontrer $\forall x P(x)$:

on montre la propriété $P(x)$ pour un x quelconque.

Comment réfuter $\forall x P(x)$:

on trouve dans un modèle un élément z tel que $\neg P(z)$.

Pour $\exists x P(x)$ il suffit d'inverser démontrer et réfuter, c.-à-d.de le voir comme $\neg \forall x \neg P(x)$.

Eventuellement d'ordre supérieur (quantification sur des propriétés, des propriétés de propriétés).

On notera que la théorie des ensembles ramène tout au premier ordre : un ensemble d'ensembles est un ensemble.

9. Les quantificateurs parfaits

La logique classique du premier ordre : un paradis !

Théorème de compacité : Si tout sous ensemble fini d'une famille de formule admet un modèle, alors la famille complète elle-même admet un modèle.

Théorème de Löwenheim Skolem Si une théorie dénombrable admet un modèle, alors elle admet un modèle dénombrable.

Théorème de complétude : $A \vdash F$ si et seulement si
pour tout modèle $\mathscr{M} \quad (\mathscr{M} \models A)$ entraîne $(\mathscr{M} \models F)$.

10. Modèles et preuves

Modèles : un modèle est un ensemble M munis de relations (partie de M^n pour interpréter les prédicats n-aires.

Preuves : fastidieux... axiomes, règles manipulant des séquents. Règle du $\forall$

S'il n'y a pas de x libre dans Γ

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\,\forall_d$$

La complétude dit que $\forall x A(x)$ est démontrable si et seulement si, dans tout modèle dont l'ensemble sous-jacent est M, on a $\&_{x_i \in M} A(x_i)$.

11. Un miracle sur lequel s'interroger

Coïncidence entre
– un/tout homme est mortel
$\forall x H(x) \Rightarrow M(x)$
– chaque/tous les hommes sont mortels
$\&_{x_i \in M} H(x_i) \Rightarrow M(x)$

Attention, ceci vaut les *modèles usuels* de la logique *classique* du *premier ordre*, mais ne dit rien des autres logiques ou modèles.

Deuxième partie

Quantificateurs usuels en logique intuitionniste

12. Similarité LJ LK

Logique intuitionniste (LJ) assez proche de la logique classique (LK) :

- si $\vdash^{LJ} F$ alors $\vdash^{LK} F$
- $\vdash^{LK} F$ si et seulement si $\vdash^{LJ} F^{\neg\neg}$ (trad. Gödel)

Les preuves sont plutôt plus naturelles
(déduction **naturelle** : une conclusion, pas de tiers exclu).
Règles similaires, mais réfuter un $\forall$ un n'établit pas un $\exists$.
Moins de théorèmes donc plus de modèles :
il y a davantage de formules à réfuter.

13. Motivations linguistiques

– premier pas vers la logique modale
(nécessité / possibilité)
– premier pas vers la logique linéaire
(qu'on utilise pour les glissements de sens)
– comme en logique intuitionniste,
la double négation est plus faible que l'affirmation :

(16) Tu n'es pas sans savoir que les moustiques sont attirés par la lumière.

(17) Ce n'est pas faux.

14. Préfaisceaux de modèles

Soit X un espace topologique et Ω l'ensemble de ses ouverts.
Soit $\mathscr{C}$ une catégories de structures (ensembles, groupes, anneaux,....)

Pour tout ouvert U de Ω on se donne un objet $F(U) \in \mathscr{C}$.

Pour tous U et V avec $U \supset V$ on dispose d'une fonction de restriction : $\rho_{U,V} : F(U), F(V)$ satisfaisant :

– $F(\emptyset)$ est un singleton.
– $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F(U)}}$
– si $U \supset V \supset W$ alors $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$

15. Faisceaux

Un faisceau est un préfaisceau satisfaisant la condition de recollement suivante :

Pour tout recouvrement $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de $U \in \Omega$ pour toute famille (f_i) avec $f_i \in F(U_i)$ pour tout i si les f_i coïncident sur les intersections

$$\forall i, j \ \rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_j \cap U_i}(f_j)$$

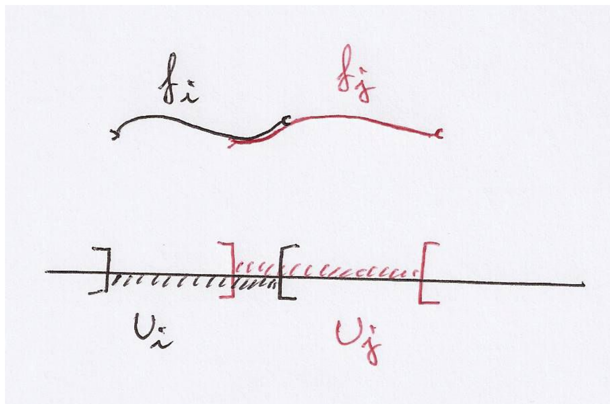
alors il existe un unique $f \in F(U)$ tel que, pour tout i

$$\rho_{U,U_i} = f_i$$

.

16. La condition de recollement, en français

Pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$, si une famille de sections locales $(f_i)_{i \in I}$ coïncident sur les intersections, alors les (f_i) sont les restrictions au U_i d'une unique section globale f.



17. Exemples sur l'espace topologique $\mathbb{R}$

$F(U) = \mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ (fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$) est un faisceau d'anneaux.

Un préfaisceau qui n'est pas un faisceau :
$F(U) = \mathscr{B}(U, \mathbb{R})$ (fonctions bornées de U dans $\mathbb{R}$) est un préfaisceau d'anneaux mais pas un faisceau. En effet, le recollement de fonctions localement bornées peut ne pas être globalement borné.

18. Faisceaux de L-structures

Classiquement un modèle M de T est une L-structure (c.-à-d. un ensemble, des lois de composition n-aires des relations n-aires permettant d'interpréter L) dans laquelle les axiomes de T sont vrais.

Ici, on va se donner un faisceau à valeurs dans la catégorie des L-structures. Un morphisme de L structures est une application qui préserve l'interprétation des termes et la vérité des formules.

19. Yoneda et les L-structures

Le lemme de Yoneda garantit qu'il revient au même de se donner

1) un faisceau F à valeurs dans la catégorie des L-structures.

2) un faisceau d'ensembles F muni d'un morphisme de faisceaux $F^n \longrightarrow F$ pour chaque opération n-aire et un d'un sous-faisceau de F^n pour chaque relation n-aire du langage L.

Par exemple, il revient au même de se donner un faisceau d'ensembles F muni d'un morphisme de faisceaux $F \times F \longrightarrow F$ ou de se donner un faisceau à valeurs dans la catégorie des magmas (ensembles munis d'une loi de composition interne).

20. Yoneda et le recollement des vérités élémentaires

Pour les relations, le recollement induit la propriété suivante :

si pour tout U_i d'un recouvrement $U = \bigcup U_i$ on a
$F(U_i) \models R(\rho_{U,U_i}(c_1), \ldots, \rho_{U,U_i}(c_p))$
($c_k \in F(U)$, ce sont des sections globales)
alors $F(U) \models R(c_1, \ldots, c_p)$

21. Forcing de Kripke-Joyal : principes

Etant donné un faisceau M de L-structures, comment exprimer que M est un modèle de T ? On définit une vérité locale, relative à un ouvert U, en associant à U un modèle usuel par un faisceau.

Le forcing étend à toute formule A à p variables, la propriété de recollement :

– si pour tout U_i d'un recouvrement $U = \bigcup U_i$ on a
$F(U_i) \models A(\rho_{U,U_i}(c_1), \dots, \rho_{U,U_i}(c_p))$
($c_k \in F(U)$, ce sont des sections globales)

– alors $F(U) \models A(c_1, \dots, c_p)$

22. Forcing de Kripke-Joyal : principes (bis)

On définit $U \Vdash F$ (U ouvert F formule) comme le **forcing** de Paul J. Cohen (qui construisit un cardinal strictement entre ceux de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$).

Remarque la vérité dune formule dans un ouvert se projette sur un ouvert plus petit
$U \Vdash F, V \subset U$ entraîne $V \Vdash F$.

23. Forcing de Kripke-Joyal : règles

$U \Vdash F$ est définie en fonction des $V \Vdash G$ pour $V \subset U$ et G sous formule de F.

$U \Vdash F_1 \wedge F_2$ si $U \Vdash F_1$ et $U \Vdash F_2$.

$U \Vdash F_1 \vee F_2$ s'il existe deux ouverts U_1 et U_2 avec $U = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \Vdash F_1$ et $U_2 \Vdash F_2$.

$U \Vdash \exists x\ A(x)$ s'il existe un recouvrement $U = \bigcup U_i$ et $\forall i \exists f_i \in F(U_i)$ tel que $U_i \Vdash F(f_i)$.

$\emptyset \Vdash \bot$

$U \Vdash \neg F$ si $\forall V \subset U$ $(V \neq \emptyset$ entraîne $V \nVdash F)$.

$U \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ si $\forall V \subset U$ $(V \Vdash F_1$ entraîne $V \Vdash F_2)$.

24. Ω-structures

La complétude de la logique intuitionniste pour les modèles faisceautisés est toujours présentée de manière indirecte via les Ω-sets et Ω-structures.

Les formules quotientées par $\vdash A \leftrightarrow B$ et avec l'ordre $[A] \leqslant [B]$ si $\vdash A \Rightarrow B$ ($\vdash$ intuitionniste). forment une algèbre de Heyting, qu'on peut compléter (sup quelconques) en $\Omega_\vdash$ (cHa).

On peut définir des $\Omega_\vdash$-structures (éléments partiels, valeur de vérité dans Ω). Être vrai dans la $\Omega_\vdash$-structure syntaxique équivaut alors à être démontrable.

25. Complétude de la logique intuitionniste pour les modèles faisceautisés

$\Omega_\vdash$ n'est peut-être pas une topologie, mais c'est une prétopologie (ou topologie de Grothendieck) et on peut définir des faisceaux au dessus de $\Omega_\vdash$.

Il y a une équivalence de catégories $Sh(\Omega) \simeq \Omega-$**Structure** qui affirme que la $\Omega_\vdash$-structure syntaxique est un faisceau, qui garantit la complétude.

En fait, en présence d'une vraie topologie, cela revient à associer à une formule F comme valeur de vérité l'ouvert

$$|F| = \bigcup_{\mathscr{U} \in \Omega, \mathscr{U} \Vdash F} \mathscr{U}$$

26. Exemple dans le cadre des anneaux

Langage des anneaux $(0, 1, +, \times)$.

Soit la formule $(\neg\forall x A(x)) \Rightarrow (\neg\forall x \neg\neg A(x))$ avec $A(x) : (x = 0) \vee \neg(x = 0)$.

C'est une formule démontrable classiquement mais pas intuitionnistiquement. Il existe donc un modèle faisceautisé qui la réfute.

Effectivement, elle est fausse dans le faisceau sur $\mathbb{R}$, $U \mapsto \mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ (qui est un bien un anneau). Ce faisceau d'anneaux est un modèle intuitionniste des axiomes des anneaux (locaux).

27. Exemple dans le cadre des anneaux : détails

Montrons que $(\neg\forall x A(x)) \Rightarrow (\neg\forall x \neg\neg A(x))$ avec $A(x) : (x = 0) \vee \neg(x = 0)$est fausse dans ce modèle :

$\mathbb{R} \Vdash \forall x \neg\neg(x = 0 \vee \neg x = 0)$ est vraie, car elle est démontrable.

$\mathbb{R} \Vdash \neg\forall x (x = 0 \vee \neg x = 0)$ est aussi vraie.

28. Exemple dans le cadre des anneaux : détails / fin

$\mathbb{R} \Vdash \neg\forall x(x = 0 \vee \neg x = 0)$ est aussi vraie.

En effet, d'après Kripke-Joyal, cela revient à trouver dans tout ouvert U un ouvert V et une fonction f de $\mathscr{C}(V, \mathbb{R})$ tel que V ne soit pas la réunion

– d'un ouvert V_1 sur lequel f est constamment nulle,
– et d'un ouvert V_2 ne contenant pas d'ouvert V_2' sur lequel f soit constamment nulle.

Prendre $V =]a, b[$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]a, (a+b)/2[$ et $f(x) = x - (a+b)/2$ pour $x \in [(a+b)/2, b[$

29. Travail en cours : complétude intuitionniste (Ciardelli, Gillibert, Retoré)

- Preuve directe de la complétude de la logique intuitionniste pour les faisceaux de modèles.
- Il en existe pour les préfaisceaux, mais le préfaisceau utilisé dans la preuve de complétude est-il un faisceau ?
- Construire le modèle syntaxique comme un faisceau.
- Question : la cHa utilisée comme prétopologie est-elle une topologie ? (plutôt non)

30. Vers des extensions modales, linéaires (Ciardelli, Gillibert, Retoré)

- Adaptation au calcul des prédicats pour S4 ?
- En partant d'un treillis avec $\otimes$ et d'une définition de ! en terme d'ordre et de $\otimes$ (Abrusci-Retoré), peut-on obtenir des modèles de la logique linéaire du premier ordre (si théorie algébrique Mai Gehrke sait faire).

Troisième partie

Quantificateurs généralisés

31. Définissables... ou pas !

Définissables :

au moins deux : $\exists x \exists y\ x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)$

deux :

$\exists x \exists y\ x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge \forall u (P(u) \Rightarrow (u = x \vee u = y))$

au plus deux :

$\exists x \exists y\ P(x) \wedge P(y) \wedge \forall u (P(u) \Rightarrow (u = x \vee u = y))$

Non définissables :

«*la majorité*» des individus satisfont P

ainsi que «*un nombre infini de*», «*un nombre fini de*», «*la plupart des*»,

32. Idée des preuves de non définissabilité

«*un nombre fini de*» n'est pas définissable :

Soit l'ensemble de formules

- F_0= un nombre fini d'éléments satisfait A exprimé au premier ordre, en supposant que ce soit possible
- F_n = au moins n éléments différents satisfont A

Toute partie finie à un modèle, mais le tout n'a pas de modèle : si F_0 était du premier ordre cela contredirait la compacité.

Parfois il faut aussi utliser Löwenheim-Skolem descendant (par ex. pour la non définissabilité de «*la majorité de*»).

33. Preuves, réfutations et quantification généralisée

Une autre approche de la quantification : jeux.

Prouver contre Réfuter (logique intuitionniste, Lorenz et Lorenzen)

– prouver $\forall$: démontrer pour un individu générique
– refuter $\forall$: trouver un terme qui contredit
– prouver $\exists$: exhiber un terme
– réfuter $\exists$: établir un $\forall$

34. La majorité de, la plupart

(18) Les français ont voté Sarkozy en 2007.

(19) La plupart des français ont une télé.

La plupart ombine les difficultés de «*la majorité de*», mais aussi de «*beaucoup*» : la plupart c'est nettement plus que la moitié, mais quand est-ce que cela commence ?

Usage très très fréquent

(«*les*» signifie souvent «*la plupart des*»)

35. Mesures

(20) La plupart des nombres sont premiers NON

(21) La plupart des nombres ne sont pas premier OUI

Même dans des ouvrages mathématiques avancés, on trouve cette formulation pour dire que la $\lim_{n\to\infty}$ de la proportion de nombres premiers tend vers 0.

Ce n'est pas une question de cardinalité, mais de mesure.

Modéle : mesure. Mesure sur les espace de fonctions (J.-F. Marckert).

36. Preuves utilisant «*La majorité de*»

Deux sortes de réfutations de «*la majorité des x satisfont A*» :

- «*Seulement très peu de x satisfont A*»
- «*La majorité des x satisfont une propriété incompatible avec A*»

37. Compréhension humaine de la quantification : le mystère de Henkin

Quantificateurs de Henkin :

(22) Un membre de chaque conseil de labo connait un conseiller de chaque municipalité girondine.

(23) $\left(\dfrac{\forall l \quad \exists m}{\forall g \quad \exists c}\right)$ L(m,l)=x et M(c,g)=x' et C(m,c)

On en trouve, rarement, mais on en trouve !

Pourtant la vérification est très compliqué, la réfutation aussi : Vérifier ou réfuter une telle formule dans un modèle fini est un problème NP-complet. Que veut dire le locuteur ? Que comprend l'interlocuteur ?

38. Compréhension humaine de la quantification : 2 remarques

On sait aussi que pour les existentielle négatives («*personne, aucun, etc.*») se rend compte plus vite qu'elles sont fausses qu'on ne constate qu'elles sont vraies. Il faut imaginer ce que serai quelqu'un faisant ce qui est dit est comparer avec la situation pour voir si c'est compatible.

Portées respectives des quantificateurs :

On observe une préférence pour l'ordre gauche droite sauf si le contenu lexical favorise le contraire.

Quatrième partie

Conclusion

Beaucoup de questions tant logiques que linguistiques :

– Quels modèles pour la quantification dans des logiques non classiques ?
– Quels modèles, quelles preuves pour les quantificateurs généralisés ?
– Quelles variations entre les différents modes de quantification ?
– Peut on mesurer notre difficulté à comprendre les énoncés avec quantificateurs ?

Du pain sur la planche !