

Première Journée Mondiale de la Logique
14 Janvier 2019

*Vérité versus validité
à la lumière de la méthodologie
des sciences déductives de Tarski*

Viviane Durand-Guerrier

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck,
CNRS, Univ. Montpellier





Alfred Tarski

14 Janvier 1901 – 27 octobre 1983

La conception sémantique
de la vérité
(Tarski, 1936a, 1944)

Mathématicien et logicien, Tarski s'attaque à un problème philosophique difficile, celui d'une définition sémantique de la vérité.

Dès les premiers lignes de l'article de 1936, Tarski énonce son projet en ces termes :

« Le présent travail est presque exclusivement consacré à un seul problème, au problème de la définition de la vérité. Il s'agit en effet –compte tenu de tel ou tel langage – de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte.

La solution de ce problème, l'un des problèmes classiques de la philosophie, rencontre des difficultés particulières bien que la signification courante [« donnée au départ »] de l'expression en question paraisse nette et transparente, toutes les tentatives pour la préciser se sont soldées jusqu'ici par un échec et maintes recherches, où cette expression figure fondée sur des prémisses apparemment intuitives [évidentes], ont abouti à des paradoxes ou antinomies. »

(Tarski, 1936a, 1972, p.159).

« (...) dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « classique » de vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité ». (par opposition à la conception « utilitariste » d'après laquelle « vrai » signifie utile sous tel ou tel rapport).»

(Tarski, 1936a, 1972, pp.159-160)

Tarski va s'intéresser aux langages formalisés pour lesquels il *élabore une construction récursive* de la vérité s'appuyant sur la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément de l'univers du discours.

.

« Aussi ne voit-on pas de méthode permettant, dans ce contexte, de définir le concept examiné directement par la voie récursive. Il se révèle, par contre, possible d'introduire un concept de nature plus générale, concept applicable à des fonctions propositionnelles quelconques et qui se laisse définir récursivement. Appliqué aux propositions, il conduit indirectement au concept de vérité ; c'est le concept de satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels et tels objets (...) »

(Tarski, 1936a, 1972, p.193).

« La sémantique est une discipline qui, en termes généraux, traite de certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets (ou états de choses) auxquels réfèrent ces expressions. Nous pouvons mentionner comme exemples typiques de concepts sémantiques les concepts de désignation, de satisfaction et de définition tels qu'ils se trouvent dans les exemples suivants :

L'expression « le père de ce pays » désigne (dénote) George Washington ;

La neige satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc »;

L'équation ' $2.x = 1$ ' définit (détermine uniquement) le nombre $1/2$. » (op. cit.)

Autres exemples

Le nombre 29 satisfait la propriété « être un nombre premier ».

Le nombre 119 ne satisfait pas la propriété « être un nombre premier » ($119 = 7 \times 17$)

Une définition récursive de la vérité

- *interprétation d'une fonction propositionnelle* d'un langage donné dans un « domaine de réalité » par une phrase ouverte
- *satisfaction d'une phrase ouverte* par un élément de l'univers du discours

Pour tout a , a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.

- *Définition de la vérité d'une phrase complexe*
 - Extension des connecteurs propositionnels (Wittgenstein) aux phrases ouvertes
 - quantificateurs (en accord avec le sens commun)

Négation

“La négation d’ une fonction propositionnelle $F(x)$ est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas $F(x)$ ”

« $F(x)$ ou non $F(x)$ » est vrai dans toute interprétation C' est l’ extension du tiers exclu aux fonctions propositionnelles.

Dans l’ ensemble des entiers naturels, la propriété « être un nombre impair » est la négation de la propriété « être pair »

« un entier naturel est soit pair, soit impair » (exclusif)

Implication

Une implication ouverte “ $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ” est satisfaite par les éléments qui satisfont « $P(x)$ » et « $Q(x)$ » (les exemples), et par ceux qui ne satisfont pas « $P(x)$ » (les hors sujets, Marc Legrand) ; elle est non satisfaite par les éléments qui satisfont « $P(x)$ » et qui ne satisfont pas « $Q(x)$ » (les contre-exemples) (*définition récursive de la satisfaction*)

Les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la propriété « **si** un nombre entier est pair, **alors** son successeur est premier » sont les entiers pairs à successeurs premiers et les entiers impairs.

La notion de conséquence logique (Tarski, 1936b) et
la méthodologie des sciences déductives
(Tarski 1960)

La notion sémantique de conséquence logique

Un langage formalisé \mathcal{L} , une syntaxe, des énoncés bien formés (des formules) : $F, G, H...$

Une structure interprétative Σ (un domaine de réalité, une théorie mathématique)

Σ est *un modèle* d'une formule F de \mathcal{L} *si et seulement si* l'interprétation de F dans Σ est un énoncé vrai

Exemple

Le langage des prédicats du premier ordre

$$F : \forall x \forall y (S(x,y) \wedge S(y,x) \Leftrightarrow x=y)$$

Σ : ensemble des nombres réels ordonnés

– $S \rightarrow$ relation '*inférieur ou égal*'

– $F \rightarrow$ « la relation '*inférieur ou égal*' est antisymétrique »

Σ est un modèle de F

« La proposition X suit logiquement des propositions de la classe K si et seulement si tout modèle de la classe K est un modèle de la proposition X .

Il me semble que toute personne qui comprend le contenu de cette dernière définition doit admettre qu'elle s'accorde parfaitement avec le sens commun ».

(Tarski, 1936b, 1974, p. 150)

Une formule H est *conséquence logique* d'une formule G si et seulement si tout modèle de G est modèle de H .

$$G : p(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x)) \quad H : q(x)$$

H est conséquence logique de G : *Modus Ponens*

$$K : \ll \neg q(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x)) \quad L : \neg p(x)$$

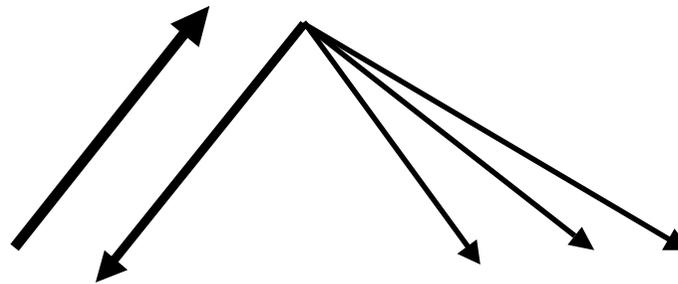
L est conséquence logique de K

Modus Tollens

Méthodologie des Sciences déductives

(Tarski, 1960, *Introduction à la logique*)

Systeme axiomatique formel
(sans référence à des objets)



Mini-théorie déductive

Termes primitifs

Termes définis

Axiomes

Théorèmes

Modèles

Univers du discours

Interprétation

des lettres

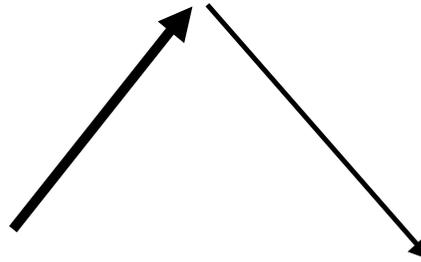
Le théorème de la déduction

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (...)

Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (p.112)

Preuves par interprétation

Un système axiomatique formel
(sans référence à des objets)
Une formule Φ associée à F



Une théorie déductive T

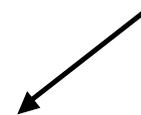
Axiomes

Un énoncé vrai F

Un Modèle M

G l'interprétation de Φ

G est un énoncé faux de M



F n'est pas une conséquence logique des axiomes de T

Pour prouver qu'un énoncé donné d'une théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la formule associée à cet énoncé.

La résolution des contradictions
Un exemple tiré de
Sparkling Cyanide
(Agatha Christie, 1945)

Cet exemple est analysé dans Durand-Guerrier (2006)

On trouve dans ce roman d'Agatha Christie, traduit en français sous le titre *Meurtre au champagne* une illustration particulièrement claire de la méthodologie des sciences déductives et la distinction et de l'articulation entre les trois catégories *syntaxe*, *sémantique*, et *pragmatique*.

En sciences du langage, dans la suite d'une théorie des signes, due à Morris, on considère trois aspects (Eco, 1980)

La sémantique : le signe est conçu dans la relation à ce qu'il signifie

La syntaxe : le signe est abordé comme inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaison

La pragmatique : le signe est perçu en fonction de ses origines, des effets qu'il a sur ses destinataires, les usages qui en sont fait.

A ce moment du roman, un des personnages, George Barton, a été assassiné.

Tony, qui était présent le jour du meurtre expose avec brio à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble a priori qui s'est posé suite à l'assassinat de George, solution qu'il qualifie de *géniale*. En effet, il apparaît que *George n'a pas pu être empoisonné*, et pourtant *Georges a été empoisonné*.

On a donc un énoncé de la forme

« $E(a)$ et il est impossible que $E(a)$ »

d'où dérive l'énoncé :

« $E(a) \wedge \neg E(a)$ » (1)

La conjonction des deux phrases est une phrase fausse en raison de sa structure, indépendamment de la signification de chacune des phrases ; il s'agit d'un argument de nature *syntaxique*.

« L'affaire, grosso modo, *paraissait* simple comme bonjour. Ce que j'entends par là, c'est que les relations de cause à effet s'imposaient [...]. L'enchaînement logique, si je peux m'exprimer ainsi, semblait évident. Seulement quelques contradictions évidentes sont presque aussitôt apparues. Telles que : a) Personne n'a *pu* être empoisonné – b) George a *été* empoisonné. Et : a) *personne* n'a touché à la coupe de George – b) *quelqu'un* a mis du poison dans la coupe de George. »

En considérant l'énoncé implicite suivant « *on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de George sans l'avoir touché* », un autre énoncé contradictoire est relevé par Tony :

*Personne n'a touché à la coupe de George
et quelqu'un a touché la coupe de George.*

qui peut se modéliser dans le calcul des Prédicats sous la forme

$$\ll \neg (\exists x T(x)) \wedge \exists x T(x) \gg (2)$$

Le paradoxe que Tony doit résoudre provient du fait que ces deux énoncés contradictoires, de la forme

$$\ll p \wedge \neg p \gg (3)$$

qui a priori ne décrivent aucun état de choses décrivent bel et bien chacun un état du monde (au sein de la fiction). Autrement dit la situation considérée fournit un modèle de (3), ce qui évidemment n'est pas logiquement acceptable, comme l'écrit Wittgenstein dans le *Tractacus*.

4.462 – La tautologie et la contradiction ne sont pas des images de la réalité. Elle ne représentent pas d'état de choses possibles. Car la tautologie admet *chaque* état de chose possible, la contradiction n'en admet *aucun*.

Dans la tautologie, les conditions d'accord avec le monde – les relations de représentation – se suppriment mutuellement de telle sorte qu'elle ne se trouve en aucune relation de représentation à la réalité. (Wittgenstein, 1921, 1961, p.63)

Tony poursuit

« En réalité, je négligeais un élément capital, à savoir les différents degrés d'appartenance.

« L'oreille de George » est incontestablement l'oreille de George. [...] Mais par « la montre de George », je me borne à désigner la montre que porte George. [...] Et quand j'en arrive à la « coupe de George » [...] je commence à me rendre compte que l'appartenance évoquée recouvre une réalité des plus vagues (pp. 432-433)

Tony propose ainsi de se placer sur le niveau ***sémantique*** en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : *l'oreille de Georges / la coupe de Georges / la montre de Georges.*

Bien que les structures syntaxiques soient identiques, la « force » de relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes, ce qui invaliderait le raisonnement conduisant à la contradiction. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer.

Tony se livre alors à une petite expérience.

Il construit une situation artificielle (un modèle au sens de Tarski 1960) dans laquelle l'énoncé implicite « *on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de George sans l'avoir touché* » est faux.

Pour cela, il s'installe avec deux personnes autour d'un guéridon, chacun ayant une tasse de thé devant lui contenant des boissons différentes mais semblant identiques ; l'un des personnages (Kemp) a une pipe posée à côté de sa tasse. Sous un prétexte, il fait sortir à la hâte ses amis, et il profite de la bousculade pour changer la place de la pipe. Lorsqu'ils rentrent à nouveau, le possesseur de la pipe s'assied à la place où se trouve sa pipe.

Tony s'exclame alors

« Oui, mais notez bien sur quoi débouche mon subterfuge : sur une nouvelle contradiction entre a) et b) ! En effet, a) la tasse de Kemp contenait du thé sucré – b) la tasse de Kempf contenait du café. Deux propositions antagonistes qui ne *pouvaient* être vraies toutes les deux.... Et qui pourtant l'étaient bien. »

On peut construire une mini-théorie Θ au sens de Tarski dont la situation artificielle construite par Tony est une réalisation :

[Il y a des convives et des tasses, et 3 axiomes:

A1 - Chaque convive a une tasse.

A2 - Le contenu de chaque tasse est au moins en apparence le même.

A3 - Aucun convive ne touche la tasse d'un autre convive.]

L'énoncé formel associé à l'énoncé « *si on modifie le contenu d'une coupe, alors on a touché cette coupe* » n'est pas un théorème de la théorie Θ .

En effet, l'expérience construite dans par Tony montre que l'on peut construire un modèle de Θ dans lequel l'interprétation de cet énoncé est faux.

C'est un exemple de preuve par interprétation au sens de Tarski (1960).

Retour à la situation fictive initiale.

On ne peut pas déduire de l'énoncé

« quelqu'un a *fourré* du poison dans la coupe de Georges » (4)

l'énoncé

« Quelqu'un a *touché* la coupe de Georges ». (5)

Ceci ouvre la possibilité que l'énoncé (5) soit faux, bien qu'il soit établi que l'énoncé (4) soit vrai.

«

Autrement dit, il se peut que le contenu de la coupe de George ait été modifié (ce qui est le cas) sans que personne n'ait touché à la coupe de George.

Ici s'arrête les apports de l'analyse logique d'un point de vue sémantique. Pour poursuivre le raisonnement, il faut prendre en compte la dimension *pragmatique* : examiner ce qui s'est réellement passé *ce jour là, dans cette situation, dans ce lieu avec ces personnes*. Ce que fait Tony après avoir décrit son expérimentation à Iris.

« Et ça Iris, c'est ce qui s'est passé au Luxembourg le jour ou George Barton est mort. A la fin des attractions, quand nous sommes tous allés danser, vous avez laissé tomber votre sac. Un garçon l'a ramassé, non pas *le* garçon qui connaissait votre place, mais *un* garçon, un petit serveur anxieux, pressé [...] Il a ramassé le sac et l'a placé près de l'assiette qui se trouvait à gauche de la vôtre, et vous êtes allés tout droit à la place indiquée par votre place. »

Ce retour minutieux au fait renvoie à la dimension *pragmatique* de l'analyse logique.

Ceci ne clôt pas l'analyse de l'intrigue. A ce stade, il n'y a pas de certitude absolue de ce que les places ont été changées (cf. Wittgenstein), et si elles l'ont été on ne sait pas par qui.

Mais cela oriente les recherches pour résoudre l'intrigue; en effet ceci conduit Tony à envisager que la personne visée était Idriss. Ce qui se révèle être le cas.

193. Qu'est-ce que cela veut dire que la vérité d'une proposition est *certaine* ?

194. Par le mot « certain », nous exprimons la conviction totale, l'absence de moindre de doute, et nous cherchons par là à convaincre autrui. C'est la certitude *subjective*.

Mais quand y-a-t-il de l'objectivement certain ? – quand une erreur n'est pas possible. Mais quelle genre de possibilité est-ce là ? Ne faut-il pas que l'erreur soit *logiquement* exclue ?

(Wittgenstein, 1976. p. 66)

Conclusion

Cet exemple illustre sur une situation très simple

- La méthodologie des sciences déductive développée par Tarski.
- Le fait que le point de vue *modèle-théorique* initié par Tarski permet de repenser l'articulation entre vérité, nécessité et certitude.
- Le fait que la volonté de Tarski de se placer au plus près de la notion commune de vérité et d'opérer un va et vient entre formalisme logique et interprétation dans un modèle réduit la distance supposée entre logique de sens commun et logique mathématique.

« Tarski élargit le spectre des concepts méta mathématiques propres à permettre d'établir des rapports entre forme et contenu. Plus encore, il définit un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permis par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète »

(Sinaceur 1991, p.313).

Références

CHRISTIE, A (1945) *Sparkling Cyanide*. Collins.

DURAND-GUERRIER, V. (2006) La résolution des contradictions: apports de la sémantique logique. In V.Durand-Guerrier, J.L. Héraud, C. Tisseron (2008) Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe. Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 161-179..

SINACEUR, H. (1991) Corps et Modèles . Paris : Vrin

TARSKI, A. 1936a. Le concept de vérité dans les langages formalisés in Logique, sémantique et métamathématique, volume 1 : 157-269. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. 1936b. Sur le concept de conséquence in Logique, sémantique et métamathématique, volume 1 : 141-152. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. 1944. La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in Logique, sémantique et métamathématique, volume 2 : 265-305. Armand Colin, 1972

TARSKI, A. (1960) Introduction à la logique . Paris-Louvain

WITTGENSTEIN, L.(1921) Tractatus logico-philosophicus . Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.

WITTGENSTEIN, L. (1969) Über Gewissheit. Tr. Fr. De la certitude, Gallimard, 1976.

Crédit photo : Tarski A.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1d/Alfred_Tarski.jpeg