Méthode probabiliste pour la coloration de graphes

Frédéric Havet

MASCOTTE

Séminaire Optimisation Discrète – LIRMM – 14 mai 2009

Probabilités (discrètes)

espace de probabilités: $(\Omega, \mathbf{Pr})$

Ω est un ensemble fini, ensemble échantillon

$\mathbf{Pr} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ fonction de probabilité t. q. $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) = 1$.

distribution uniforme: $\mathbf{Pr}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

événement: sous-ensemble A de Ω. $\mathbf{Pr}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{Pr}(\omega)$.

Sous-Additivité des Probabilités: $\mathbf{Pr}(\bigcup A_i) \leq \sum \mathbf{Pr}(A_i)$

Probabilités conditionnelles et indépendance

probabilité (conditionnelle) de A sachant B: $\mathbf{Pr}(A|B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)}$
(si $\mathbf{Pr}(B) = 0$ alors $\mathbf{Pr}(A|B) = \mathbf{Pr}(A)$).

A est indépendant de B si $\mathbf{Pr}(A|B) = \mathbf{Pr}(A)$
i.e. $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A)\,\mathbf{Pr}(B)$.

A est mutuellement indépendant des A_i, $i \in I$, si pour tout $J \subset I$

$$\mathbf{Pr}\left(A | \bigcap_{j \in J} A_j\right) = \mathbf{Pr}(A).$$

Variables aléatoires et espérance

variable aléatoire: fonction $\Omega \to \mathbb{R}$.

espérance d'une variable aléatoire X: $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) X(\omega)$.

Linéarité de l'Espérance *Si* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *alors* $\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)$.

Méthode du Premier Moment

Principe du Premier Moment: Si $\mathbf{E}(X) \leq t$ alors $\mathbf{Pr}(X \leq t) > 0$.

Inégalité de Markov: Pour toute variable aléatoire positive X,

$$\mathbf{Pr}(X \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{t}.$$

Coloration de graphe

k-coloration: application $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$.
Coloration propre: pour tout $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$.
G k-colorable: G admet une k-coloration propre.
nombre chromatique: $\chi(G) = \min\{k, G \text{ est } k\text{-colorable}\}$.

$\chi(G) \geq \omega(G)$, $\omega(G)$ taille de la plus grande clique.

$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, $\alpha(G)$ taille du plus grand stable.

Graphe de grande maille et de grand nombre chromatique

maille: taille d'un plus petit cycle.

Théorème (Erdös, 1959)

Pour tous g et k, il existe G tel que maille$(G) > g$ et $\chi(G) > k$.

Idée: Soit $\theta < \frac{1}{g}$ et n suffisamment grand.

Prendre un graphe aléatoire G de $\mathcal{G}_{n,p}$ (chaque arête indépendamment existe avec probabilité p) avec $p = n^{\theta-1}$.

Montrer qu'avec probabilité non nulle G a peu ($< n/2$) de petits cycles et pas de grand stable $\alpha(G) < 3n^{1-\theta}\ln(n)$.

Enlever un sommet par petit cycle de $G \rightarrow G'$.

$maille(G') > g$ et $\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\theta}\ln(n)} = \frac{n^\theta}{6\ln(n)} > k$.

Graphe de grande maille et de grand nombre chromatique

X: nombre de cycles de G de longueur au plus g.

Il y a $\frac{n!}{2i(n-i)!}$ cycles potentiels de longueur i et chacun de ces cycles existe avec probabilité p^i.

Linéarité Espérance $\Rightarrow \mathbf{E}(X) = \sum_{i=3}^{g} \frac{n!}{2i(n-i)!} p^i \leq \sum_{i=3}^{g} \frac{n^{\theta i}}{2i} = o(n)$

Inégalité de Markov $\Rightarrow \mathbf{Pr}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2\,\mathbf{E}(X)}{n} = o(1)$.

Posons $x = \left\lceil \frac{3}{p} \ln(n) \right\rceil$.

$\mathbf{Pr}(\alpha(G) \geq x) \leq \binom{n}{x} (1-p)^{\binom{x}{2}} < \left(ne^{-p(x-1)/2}\right)^x = o(1)$.

Lemme Local Symétrique

Théorème (Lemme Local Symétrique)

Soient $A_i, i \in I$, des événements.
S'il existe p et d tels que pour tout i

- $\mathbf{Pr}(A_i) \leq p$,
- *l'événement A_i est mutuellement indépendant de tous les événements sauf au plus d,*
- $4pd \leq 1$.

Alors $\mathbf{Pr}\left(\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}\right) > 0$.

Principe d'Indépendance Mutuelle

Théorème (Principe d'Indépendance Mutuelle)

$\mathcal{X} = X_1, \dots, X_m$ suite de tirages aléatoires indépendants.
$A_1, \dots, A_N$ événements tels que chaque A_i est déterminé par $F_i \subset \mathcal{X}$.
Si $F_i \cap \left(\bigcup_{j \in J} F_j\right) = \emptyset$ alors A_i est mutuellement indépendant de $\{A_j, j \in J\}$.

Coloration par listes

assignation de listes: fonction $L : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
L-coloration: coloration telle que $c(v) \in L(v)$.
Un graphe est L-colorable s'il admet une L-coloration propre,

Théorème

L assignation de listes telle que $|L(v)| = k, \forall v \in V(G)$.
Si pour tout sommet v chaque couleur $i \in L(v)$ apparait dans au plus $\frac{k}{8}$ listes des voisins de v, alors G est L-colorable.

Coloration par listes

Coloration aléatoire: v recoit chaque couleur de $L(v)$ avec prob. $\frac{1}{k}$.

$A_{e,i}$: "les 2 extrémités de e sont colorées i " $\mathbf{Pr}(A_{e,i}) = \frac{1}{k^2} = p$.

Si $e = xy$, alors $A_{e,i}$ dépend uniquement des couleurs attribuées à x et y.
$\mathcal{E}_x = \{A_{f,j}, x \text{ est une extrémité de } f, j \in L(x)\}$
Principe d'Indépendance Mutuelle $\Rightarrow A_{e,i}$ est mut. ind. de tous les $A_{f,j}$ sauf ceux de $(\mathcal{E}_x \cup \mathcal{E}_y)$.

Or $L(x)$ a k éléments et $\forall i \in L(x)$, x a au plus $\frac{k}{8}$ voisins ayant la couleur i. Donc $|\mathcal{E}_x| \leq \frac{k^2}{8}$. De même, $|\mathcal{E}_y| \leq \frac{k^2}{8}$.
$\Rightarrow A_{e,i}$ est mut. ind. de tous les événements sauf au plus $d = \frac{k^2}{4}$.

Lemme Local donne le résultat.

Lemme Local Général

Théorème (Lemme Local Général)

Soient $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ *ens. d'événements.*
$\forall i$, A_i *est mutullement indépendant de* $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_i$.

S'il existe $0 \leq a_i < 1$ *tel que* $\mathbf{Pr}(A_i) \leq a_i \displaystyle\prod_{A_j \in \mathcal{A}_i} (1 - a_j)$

alors $\mathbf{Pr}\left(\displaystyle\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}\right) > \displaystyle\prod_{i \in I} (1 - a_i) > 0.$

Arête-coloration acyclique

k-arête-coloration: application $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.
arête-coloration acyclique:

- si $e \cap f \neq \emptyset$, $c(e) \neq c(f)$. (propre).
- pas de cycle bicoloré.

indice chromatique acyclique:
$\chi'_a(G) = \min\{k, G \text{ a une } k\text{-arête-coloration acyclique}\}$.

Conjecture (Fiamčik – Alon,Sudakov et Zaks)

$$\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$$

Arête-coloration acyclique

Théorème (Molloy et Reed)

$\chi'_a(G) \leq 16\Delta(G)$.

Coloration aléatoire uniforme des arêtes.

$A_{e,f}$: e et f ont la même couleur (e, f adjacentes) $\mathbf{Pr}(A_{ef}) = \frac{1}{16\Delta}$

B_C: C est bicoloré C cycle pair $\mathbf{Pr}(B_C) = \frac{1}{(16\Delta)^{|C|-2}}$

Une arête est dans au plus Δ^{k-2} cycles de longueur k.

Principe d'Indépendance Mutuelle $\Rightarrow$ $A_{e,f}$ est mut. ind. de tous les $A_{e',f'}$ sauf 4Δ ($\{f,f'\} \cap \{e,e'\} \neq \emptyset$) et au plus $2\Delta^{k-2}$ B_C tels que $|C| = k$ (e ou f dans C).

Lemme Local Général avec $a_{ef} = \frac{1}{8\Delta}$ et $a_C = \frac{1}{(8\Delta)^{|C|-2}}$.

Inégalités de concentration

Principe du Premier Moment: X vaut au moins $\mathbf{E}(X)$ avec probabilité non-nulle.

Souvent on veut X est proche de $\mathbf{E}(X)$ avec grande probabilité i.e. X est concentrée.

Plusieurs outils permettent de montrer qu'une variable aléatoire est concentrée:

- Borne de Chernoff,
- Inégalité de Talagrand,
- Inégalité d'Azuma,
- Inégalité de McDiarmid,
- ...

Borne de Chernoff

$BIN(n,p)$: somme de n variables indépendantes valant 1 avec probabilité p et 0 sinon.
Linéarité de l'Espérance, $\mathbf{E}(BIN(n,p)) = np$.

Théorème (Borne de Chernoff)

Pour tout $0 \leq t \leq np$,

$$\mathbf{Pr}(|BIN(n,p) - np| > t) < 2e^{-t^2/3np}.$$

Choisissabilité des r-partis complets

$ch(G)$: plus petit k t.q. pour tout L vérifiant $L(v) \geq k, \forall v \in V$ alors G est L-colorable.
K_{m*r}: r-parti complet avec m sommets dans chaque partie V_j.

Théorème (Alon)

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall r \geq 2, m \geq 2,\ ch(K_{m*r}) \leq C.r \log m$.

$S = \bigcup_{v \in V} L(v)$.

$r \leq m$

$f : S \to \{1, \ldots, r\}$ aléatoire: pour tout $c \in S$
si $f(c) = i$ alors c utilisable sur V_i.

Avec proba. non-nulle, pour tout sommet $v \in V_i$ il existe $c \in L(v)$ tel que $f(c) = i$.

Choisissabilité des r-partis complets

$r > m$ $\qquad |L(v)| = l_0 = C.r \log m.$

Splitting trick: $R_1 = \{1, \dots, r/2\}$ et $R_2 = \{r/2+1, \dots, r\}$.
$f : S \to \{1,2\}$ aléatoire: pour tout $c \in S$
si $f(c) = i$ alors c utilisable sur $\bigcup_{j \in R_1} V_j$.

$L_1(v) = L(v) \cap f^{-1}(i)$ pour $v \in \bigcup_{j \in R_1} V_j$. $|L_1(v)| = BIN(l_0, 1/2)$.

Chernoff: $\mathbf{Pr}\left(|L_1(v)| < \frac{1}{2} l_0 - \frac{1}{2} l_0^{2/3}\right) \leq e^{-\frac{1}{2} C^{1/3} r^{1/3} (\log m)^{1/3}}$.

W.h.p. $l_1 = \min\{L_1(v), v \in V\} \geq \frac{1}{2} l_0 - \frac{1}{2} l_0^{2/3}$.

Hyp. de récurrence: $ch(K_{m*r/2}) \leq l_1$.

Coloration totale

k-coloration totale: $c : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ t.q.

- si $uv \in E(G)$, alors $c(u) \neq c(v)$;
- si $e \cap f \neq \emptyset$ alors $c(e) \neq c(f)$;
- $u \in e$ alors $c(u) \neq c(e)$.

nombre chromatique total:
$\chi_T(G) = \min\{k, G \text{ a une } k\text{-coloration totale}\}$.

Conjecture (de la Coloration Totale)

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Théorème (Molloy et Reed)

Il existe une constante C telle que $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + C$.

Coloration totale

Théorème

Pour Δ suffisamment grand, $\chi_T(G) \leq \Delta + 2\Delta^{\frac{3}{4}}$.

$k = \left\lfloor \Delta^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$; $l = \left\lfloor \frac{\Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}}{k} \right\rfloor$; c $(\Delta + 1)$-arête-coloration propre.

Partition de $V(G)$ en $V_1, \ldots, V_k$ t.q.

(i) pour tout sommet v et partie i, $|N(v) \cap V_i| \leq l - 1$,

(ii) pour tout sommet v, il y a au plus $\Delta^{\frac{3}{4}} - 2$ arêtes $e = uv$ telles que $u \in V_i$ et e a sa couleur dans $C_i = \{(i-1)l + 1, \ldots, il\}$.

Raffine cette partition. On colore les sommets de V_i avec les couleurs de C_i par l'algo. glouton. On utilise $lk \leq \Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}$ couleurs.

R graphe des arêtes conflictuelles: $\Delta(R) \leq \Delta^{\frac{3}{4}} - 1$. On colore les arêtes R avec $\Delta^{\frac{3}{4}} - 1$ nouvelles couleurs.

Coloration totale: existence de la partition

Partition aléatoire uniforme.

$A_{v,i}$: (i) n'est pas vérifiée pour (v,i)
B_v: (ii) n'est pas vérifiée pour v.

P.I.M. : $A_{v,i}$ (ou B_v) mut. ind. de tous sauf ceux concernant des sommets à distance au plus 2. $d = (k+1)\Delta^2 \leq \Delta^3$.

On veut $\mathbf{Pr}(A_{v,i}) \leq \frac{1}{4\Delta^3}$ et $\mathbf{Pr}(B_v) \leq \frac{1}{4\Delta^3}$ et appliquer le Lemme Local.

Coloration totale: Borner $\mathbf{Pr}(A_{v,i})$ et $\mathbf{Pr}(B_v)$

$$|N(v) \cap V_i| = BIN\left(\Delta, \frac{1}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(A_{v,i}) &= \mathbf{Pr}\left(|N(v)\cap V_i| > \frac{\Delta + \Delta^{\frac{3}{4}}}{k}\right) \\
&\leq \mathbf{Pr}\left(\left||N(v)\cap V_i| - \frac{\Delta}{k}\right| > \frac{\Delta^{\frac{3}{4}}}{k}\right). \\
&\leq 2e^{\frac{-\Delta^{1/6}}{3}}. \quad \text{par Chernoff}
\end{aligned}$$

$R_v = \{uv, u \in V_i \text{ et } c(e) \in C_i\}$. $\quad R_v = BIN\left(\Delta, \frac{1}{k}\right)$

Chernoff: $\mathbf{Pr}\left(\left||R_v| - \frac{\Delta}{k}\right| > \frac{\Delta}{k}\right) \leq 2e^{-\frac{\Delta}{3k}}$.

$k = \left\lfloor \Delta^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$ et $\frac{\Delta^{\frac{3}{4}}}{2} > \frac{\Delta}{k}$, pour Δ grand $\Rightarrow \mathbf{Pr}(B_v) \leq 2e^{-\Delta^{1/2}}$.

Méthode semi-random

Prinicipe Général

Pour construire un objet X, on construit une suite d'objets partiels $X_1, X_2, \ldots X_t = X$.

A chaque étape on prouve l'existence de X_{i+1} (extension de X_i) en considérant une extension alétoire et en appliquant la méthode probabiliste.

Cela rend la méthode souvent beaucoup plus puissante qu'un simple choix aléatoire.

Coloration des graphes sans triangle

Algo. glouton: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Théorème (Johansson)

Si G est de maille 4 alors $\chi(G) \leq ch(G) \leq 9\frac{\Delta(G)}{\log(\Delta(G))}$.

Coloration naive: A chaque étape

1. chaque sommet (non coloré) v recoit alétoirement une couleur de sa liste $L(v)$.
2. Si deux sommets voisins ont la même couleur on les décolore.
3. On met $L(v)$ à jour en y retirant les couleurs des voisins colorés.

Coloration des graphes sans triangle

Ce qui fait gagner: Dans une coloration aléatoire, beaucoup de couleurs sont répétées sur $N(v)$. Donc $|L(v)|$ décroit moins vite que $N(v)$ (voisinage non-coloré). Après beaucoup d'itérations, on peut colorer de manière gloutonne car $L(v) > N(v)$.

Problème: si $L(v)$ est petit, à la première itération presque tous les sommets sont décolorés.

Modification: A chaque étape, on active un petit nombre de sommets.