Chapitre 8

Méthode de déchargement

8.1 Principe de base et premiers exemples

Le principe de la Méthode de Déchargement est le suivant. Supposons que l'on veuille montrer qu'une classe de graphes $\mathcal{G}$ a une propriété P. On prend un graphe $G \in \mathcal{G}$ et on assigne des charges aux éléments de G. En utilisant les propriétés des graphes de $\mathcal{G}$, on montre que la charge totale est constante (généralement négative). Ensuite on *redistribue* les charges suivant un certain nombre de *règles de déchargement* que l'on définit. A la fin de cette phase de déchargement, on montre que soit la charge totale est différente (ce qui est impossible) soit que G a une structure spécifique impliquant qu'il ait la propriété P. En général, la classe $\mathcal{G}$ considérée est soit celle des graphes planaires (ou des graphes plongeables dans une surfarce donnée comme le tore ou le plan projectif) soit celle des graphes de degré moyen maximal borné [1] . Dans le premier cas, pour montrer que la charge est une constante, on utilise le plus souvent la formule d'Euler, dans le second on utilise que $\sum_{v\in V(G)}(d(v) - Ad(G)) = 0$.

Afin de montrer l'utilisation de la Méthode de Déchargement, nous donnons quelques exemples de propriétés des graphes planaires. La première est celle donnée en Corollaire 6.16. Nous donnons ici une preuve utilisant la Méthode de Déchargement pour illustrer cette technique.

Proposition 8.1. *Tout graphe planaire a un sommet de degré au plus* 5.

Démonstration. Assignons à chaque sommet v une charge de $d(v) - 6$ et à chaque face une charge de $2d(f) - 6$. Observons que $2|E(G)| = \sum_{v\in V(G)} d(v) = \sum_{f\in F(G)} d(f)$. Ainsi la charge totale vaut

$$\begin{aligned} \sum_{v\in V(G)}(d(v)-6) + \sum_{f\in F(G)}(2d(f)-6) &= 2|E(G)| - 6|V(G)| + 4|E(G)| - 6|F(G)| \\ &= 6(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) = -12 \end{aligned}$$

d'après la Formule d'Euler. La charge totale étant négative, un des éléments doit avoir une charge négative. Comme les faces sont de taille au moins 3, leur charge est positive. Il y a donc un sommet de charge négative, soit de degré au plus 5. □

Un autre résultat classique qui lie le degré moyen maximal à la maille[2] peut être vu comme un cas très simple de la Méthode de Déchargement.

Théorème 8.2. *Soit G un graphe planaire de maille g.*

$$Mad(G) < 2 + \frac{4}{g-2}.$$

Démonstration. Notons que cette assertion est triviale si le graphe n'a pas de cycle et est de maille infinie car tous les arbres sont de degré moyen inférieur à 2. On suppose donc que G a un cycle et donc $g < +\infty$.

[1] *Rappel :* Le *degré moyen* d'un graphe G est $Ad(G) = \frac{\sum_{v\in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$. Le *degré moyen maximal* d'un graphe G est $Mad(G) := max\,\{Ad(H), H \text{ sous-graphe de } G\}$.

[2] Rappel : la *maille* d'un graphe G, notée $maille(G)$, est la taille d'un plus petit cycle dans G ou $+\infty$ si G est acyclique.

Un sous-graphe d'un graphe planaire étant planaire, il suffit de montrer que le degré moyen d'un graphe planaire est inférieur à $2 + \frac{4}{g-2} = \frac{2g}{g-2}$. Assignons une charge de $\frac{g-2}{2}d(v) - g$ à tous les sommets et de $d(f) - g$ à toutes les faces. De nouveau par la Formule d'Euler, la charge totale est

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{g-2}{2} d(v) - g \right) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - g) = g(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) = -2g.$$

La charge totale est strictement négative et la charge de chaque face est positive. Donc la somme des charges des sommets est strictement négative : $\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{g-2}{2} d(v) - g \right) < 0$ soit $Ad(G) < \frac{2g}{g-2}$. □

Les deux exemples ci-dessus sont très simples et ne font appel à aucun mouvement de charge. L'exemple suivant est moins trivial et contient une phase de déchargement.

Proposition 8.3. *Dans tout graphe planaire G de degré minimum au moins 3, il y a un sommet de degré k incident à une face de degré l telle que $k + l \leq 8$.*

Démonstration. Appelons *coin* une incidence entre un sommet et une face. Assignons à chaque sommet v une charge de $d(v) - 4$ et à chaque face une charge de $d(f) - 4$. De nouveau, d'après la Formule d'Euler, la charge totale est

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) &= 2|E(G)| - 4|V(G)| + 2|E(G)| - 4|V(G)| \\ &= 4(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) = -8. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant une phase de déchargement. Chaque sommet v envoie $\frac{d(v)-4}{d(v)}$ à chaque coin auquel il participe. De même, chaque face f envoie $\frac{d(f)-4}{d(f)}$ à chaque coin auquel elle participe. Ainsi après cette phase de déchargement, tous les sommets et faces ont une charge de 0 et seul les coins ont une charge possiblement nulle. Comme la charge totale est négative, il doit y avoir un coin avec une charge négative. Si ce coin est l'incidence d'un sommet de degré k et d'une face de taille l, sa charge est $\frac{k-4}{k} + \frac{l-4}{l} < 0$. Ainsi $2kl - 4k - 4d < 0$. Comme $l \geq 3$ et $k \geq 3$, cela implique $k < \frac{2l}{l-2} \leq 6$ et $l < \frac{2k}{k-2} \leq 6$. Ajoutant l des ceux côtés de la première inéqualité, on obtient $k + l < \frac{l^2}{l-2} \leq 8$ car $3 \leq l < 6$. □

8.2 Configurations réductibles

Très souvent, avant de faire une phase de déchargement, on prouve que certaines structures impliquent la propriété P désirée. La manière la plus commune de faire cela est de faire une preuve par l'absurde en considérant un contrexemple miminum G. On prouve que dans premier temps que dans un tel contrexemple mimimum certaines structures sur les sommets, arêtes ou faces ne peuvent exister. De telles structures sont appelées *configurations réductibles*. Dans un deuxième temps, on montre que ces configfurations sont *inévitables*, c'est-à-dire que tout graphe de la classe $\mathcal{G}$ considérée contient l'une d'elles. Ceci prouve qu'il n'y aucun contrexemple minimum et donc que tous les graphes de $\mathcal{G}$ ont la propriété P. C'est lors de cette deuxième étape que l'on utilise la Méthode de Déchargement proprement dite. Comme nous l'avons vu précédemment, on attribue des charges aux éléments de G de manière à ce que la charge totale soit une constante, typiquement une entier strictement négatif. On effectue ensuite un processus de déchargement qui laisse la charge totale inchangée donc strictement négative. On montre alors que s'il n'y a aucune des configurations irréductibles alors tous les éléments ont une charge positive, et donc que la charge totale est positive, ce qui est une contradiction.

Le plus souvent les configurations réductibles sont des sous-graphes de taille bornée. Nous allons voir maintenant quelques exemples.

Définition 8.4. Nous appelons *d-sommet* (resp. *$(\leq d)$-sommet*, *$(\geq d)$-sommet*) un sommet de degré d (resp. au plus d, au moins d). Les notions de *d-face*, *$(\leq d)$-face* et *$(\geq d)$-face* sont définies de manière analogue. Un voisin d'un sommet est un *d-voisin* (resp. *$(\leq d)$-voisin*, *$(\geq d)$-voisin*) s'il a degré d (resp. au plus d, au moins d).

8.2.1 Choisissabilité impropre

Soit c est une coloration de $V(G)$. L'*impropreté d'un sommet v*, notée $im^c_G(v)$ ou simplement $im(v)$, est le nombre de voisins de v colorés $c(v)$, c'est-à-dire colorés de la même couleur que v. L'*impropreté de c*, notée $im_G(c)$ ou simplement $im(c)$, est l'impropreté maximale d'un sommet de G sous c :

$$im_G(c) = \max\{im^c_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Une coloration d'impropreté au plus k est dite *k-impropre*. Notons qu'une coloration 0-impropre est une coloration propre.

Un graphe est *k-improprement l-colorable* (resp. *k-improprement L-colorable*) s'il admet une l-coloration k-impropre (resp.L-coloration k-impropre). On note par $c_k(G)$ le nombre minimum de couleurs d'une coloration k-impropre de G. En particulier, $c_0(G) = \chi(G)$. Un graphe est *k-improprement l-choisissable* si pour toute l-assignation de listes L (i. e. tel que $|L(v)| = l$ pour tout sommet v) alors G est *k-improprement L-colorable.*

Nous sommes intéréssés par le plus grand entier M_2 tel que si $Mad(G) < M_2$ alors G est 2-improprement 2-choisissable. Pour cela, nous considérons un graphe H *2-minimal* c'est-à-dire qui n'est pas k-improprement 2-choisissable mais dont tous les sous-graphes stricts le sont.

Nous montrons tout d'abord certaines configurations réductibles dans H.

Lemme 8.5. *Soit H un graphe 2-minimal. Alors*
(i) Aucun sommet de H n'est de degré inférieur à 2.
(ii) Deux (≤ 3)-sommets ne sont pas adjacents.

Démonstration. (i) Supposons que H ait un sommet v de degré au plus 1. Soit L une 2-assignation de listes. Alors, par minimalité de H, $H - v$ admet une L-coloration k-impropre. Celle-ci peut être étendue à v en lui attribunat une couleur qui n'est pas attribuée à son éventuel voisin. Ainsi H est 2-improprement 2-choisissable, une contradiction.

(ii) Supposons que deux (≤ 3)-sommets u et v soient adjacents. Soit L une 2-assignation de listes. Soit $H' = H \setminus \{uv\}$ et c une L-coloration 2-impropre de H'. Si c n'est pas une L-coloration 2-impropre de H alors un des sommets u ou v, disons u, vérifie $im^c_H(u) \geq 3$. Comme $d_H(v) \leq 3$, ceci implique que tout voisin w de u (en particulier v) vérifie $c(u) = c(w)$. Soit c_u la couleur de $L(u)$ distincte de $c(u)$. En recolorant u par c_u, on obtient une L-coloration k-impropre de H. Ainsi H est 2-improprement 2-choisissable, une contradiction. □

Nous allons maintenant appliquer la Méthode de Déchargement. Attribuons à chaque sommet v une charge de $d(v)$. Le but est qu' à la fin de la phase de déchargement tout sommet est une charge finale $w(v)$ d'au moins M, ce qui impliquera que le degré moyen et donc le degré moyen maximal soit au moins M. Evidemment, on veut maximiser ce M. Intuitivement, pour cela, il faut que les sommets de grand degré donnent à ceux de petit degré qui sont initialement les plus en déficit de charge par rapport à M.

Comme les sommets de H ont degré au moins 2, d'après le Lemme 8.5-(ii), on voudrait donner aux 2-sommets. Ainsi nous allons appliquer la règle de déchargement suivante : tout (≥ 3)-sommet donne α à chacun de ses 2-voisins.

- Si v est un 2-sommet, alors il est adjacent à deux (≥ 4)-sommets d'après le Lemme 8.5-(ii). Ainsi il reçoit α de chacun de ces voisins. Ainsi sa nouvelle charge est de $2 + 2\alpha$.
- Si v est un 3-sommet, il ne reçoit ni ne donne rien car il n'a pas de 2-voisins d'après le Lemme 8.5-(ii). Donc $w(v) = 3$.
- Si v est un (≥ 4)-sommet, il donne au plus α à chacun de ses voisins. Ainsi $w(v) \geq d(v)(1-\alpha) \geq 4(1-\alpha)$. (Cette dernière inégalité n'est vraie que si $\alpha < 1$ mais comme on veut une charge de $M \geq 0$ pour tous les sommets on doit prendre un tel α ; on pourra vérifier en fin de preuve.)

Posant $M(\alpha) = \min\{2 + 2\alpha, 3, 4(1-\alpha)\}$, la charge totale est donc $\sum_{v\in V(H)} d(v) = \sum_{v\in V(H)} w(v) \geq M(\alpha)|V(H)|$. Ainsi $Ad(H) \geq M(\alpha)$. On en déduit que si $Mad(G) < M(\alpha)$ alors aucun de ses sous-graphes ne peut être 2-minimal et donc G est 2-improprement 2-choisissable.

Il nous faut donc maximiser $M(\alpha)$. On voit que le maximum est obtenu quand $2 + 2\alpha = 4(1-\alpha)$ soit $\alpha = \frac{1}{3}$. On alors $M(\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$.

Théorème 8.6. *Soit G un graphe. Si $Mad(G) < \frac{8}{3}$ alors G est 2-improprement 2-choisissable.*

8.2.2 Graphes planaires sans cycles de taille donnée

Le Théorème des Quatre Couleurs (Théorème 6.19) affirme que tout graphe planaire est 4-colorable. Ce théorème est le meilleur possible car certains graphes planaires (K_4 par exemple) ne sont pas 3-colorables. Cependant, la non-existence de certains cycles implique la 3-colorabilité. C'est par exemple le cas si le graphe est de maille 3, (donc sans cycle de longueur 3) d'après le Théorème de Grötzsch. Si on aurorise les cycles de longueur 3 et mais que l'on interdit certains cycles plus grands, on peut également espérer obtenir la 3-colorabilité. La plus célèbre conjecture dans ce domaine est celle de Steinberg.

Conjecture 8.7 (Steinberg, 1976)**.** *Tout graphe planaire sans cycle de longueur* 4 *ou* 5 *est* 3*-colorable.*

Afin d'attaquer cette conjecture, Erdös a demandé s'il existait un entier k tel qu'un graphe planaire sans cycle de longueur entre 4 et k soit 3-colorable et si oui quel est le plus petit tel k. La conjecture de Steinberg prétend que $k = 5$.

Théorème 8.8 (Abbott et Zhou, 1991)**.** *Tout graphe planaire sans cycle de longueur comprise entre* 4 *et* 11 *est* 3*-colorable.*

Démonstration. Montrons le résultat par l'absurde. Supposons que le résultat soit faux et considérons un contrexemple G avec le plus petit nombre de sommets.

Commençons tout d'abord par trouver des configurations réductibles.

Lemme 8.9. *(i) G n'a pas de sommet de degré au plus* 2 *;*
(ii) G n'a pas de sommet séparateur.

Démonstration. (i) Supposons que v soit un sommet de degré au plus 2. Par minimalité de G, $G - v$ admet une 3-coloration propre. Comme v est adjacent à au plus deux sommets, on peut étendre cette coloration à v en lui attribuant une couleur différente de celle de ses voisins. C'est une contradiction.

(ii) Suppossons que G ait un sommet séparateur v. Soient $C_1, \dots, C_k$ les composantes connexes de $G - v$. Pour $1 \leq i \leq k$, soit $G_i = G[C_i \cup \{v\}$. Par minimalité de G, tous les G_i admettent une 3-coloration propre dans $\{1, 2, 3\}$. Quitte à interchanger les couleurs, on peut supposer que v est coloré 1 dans chacune de ces colorations. L'union de celles-ci est alors une 3-coloration propre de G, ce qui est une contradiction. □

Nous allons maintenant appliquer la Méthode de Déchargement pour obtenir une contradiction. Attribuons une charge de $d(v) - 6$ à chaque sommet et une charge de $2d(f) - 6$ à chaque face. Par la Formule d'Euler, la charge totale vaut $\sum_{v \in V(G)}(d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)}(2d(f) - 6) = 6(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) = -12$. Notre but est d'effectuer une phase de déchargement afin que tous les sommets et faces aient une charge positive, ce qui est une contradiction. Initialement toutes les faces ont une charge positive et les grandes faces ont une charge largement positive. En revanche, les sommets de degré inférieur à 6 sont de charges strictement négatives. Nous allons donc effectuer un déchargement des grandes faces vers les sommets. Chaque face de taille au moins 4 (et donc au moins 12) va donner $\frac{3}{2}$ à chacun de ses sommets.

Observons que deux faces de degré 3 ne peuvent pas partager une arête car G ne contient pas de cycle de longueur 4. De plus, comme G n'a pas de sommet séparateur par le Lemme 8.9-(ii), chaque sommet v est adjacent à $d(v)$ faces donc au moins à $\lceil d(v)/2 \rceil$ faces distinctes de taille au moins 12. Examinons maintenant les charges des sommets et faces.

- La nouvelle charge d'un sommet v est au moins $d(v) - 6 + \frac{3}{2}\left\lceil \frac{d(v)}{2} \right\rceil \geq 0$ car $d(v) \geq 3$ par le Lemme 8.9-(i).
- Une face de taille 3 avait et a toujours charge nulle car elle n'a rien donné. Une face de taille plus grande est de taille au moins 12 car il n'y a pas de cycle de longueur entre 4 et 11. Sa nouvelle charge est de $2d(f) - 6 - \frac{3}{2}d(f) \geq 0$.

Ainsi la charge totale est positive, ce qui contredit qu'elle vaut -12. □

Etant donné un ensemble de configurations réductibles, la manière dont on effectue la phase de déchargement a son importance. Nous allons maintenant voir qu'en analysant un peu plus attentivement les déchargements possibles, on peut obtenir un résultat meilleur que le précédent.

Théorème 8.10 (Borodin, 1996)**.** *Tout graphe planaire sans cycle de longueur comprise entre* 4 *et* 10 *est* 3*-colorable.*

Démonstration. Il est facile de voir que les configurations réductibles du Lemme 8.9 sont toujours réductibles.

Appliquons maintenant la Méthode de Déchargement de manière plus subtile. Attribuons les mêmes charges initiales soit $d(v) - 6$ à chaque sommet v et $2d(f) - 6$ à chaque face f. La charge totale vaut -12.

Effectuons maintenant la phase de déchargement. Imaginons que l'on applique la même règle de déchargement que dans la preuve précédente. Alors tous les sommets ont une charge positive et les faces de taille au moins 12 également. Cependant les faces de taille 11 ont une charge de $16 - 11 \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ et on ne peut donc conclure. Mais une face doit-elle vraiment envoyer une charge de $\frac{3}{2}$ à chacun de ses sommets ?

Les 3-sommets sont ceux qui ont le plus grand déficit de charge avec une charge initiale de -3. Comme G ne contient pas de cycle de longueur 4, un 3-sommet est adjacent à au plus une 3-face. S'il est adjacent à une 3-face, il ne peut recevoir que de deux grandes faces et donc il doit effectivement recevoir $\frac{3}{2}$ de chacune d'entre elles. Un tel sommet est dit *mauvais*. En revanche, si un 3-sommet n'est adjacent à aucune 3-face alors il peut recevoir de trois faces et un don de 1 par face suffit. Appelons de tels sommets *sommets simples*. Comme deux 3-faces ne peuvent partager une arête alors un 3-sommet est nécessairement simple ou mauvais. Pour la même raison, un sommet de degré 4 ou 5 est incident à au plus deux 3-faces. Ainsi il est également suffisant que chacune des faces incidentes lui donne 1.

Adoptons une nouvelle règle de déchargement. Chaque grande face (de degré au moins 11) donne $\frac{3}{2}$ à ses sommets mauvais et 1 à ses autres sommets. De cette manière, tous les sommets ont une charge positive et toutes les (≥ 12)-face également. Reste à considérer les 11-faces. Celles-ci sont adjacentes à au plus 10 mauvais sommets car ceux-ci viennent par paire. Ainsi la charge d'une 11-face est d'au moins $16 - \frac{3}{2} \times 10 - 1 = 0$. Toutes les charges sont donc positives et on obtient la contradiction désirée. $\square$

Au vu de la preuve précédente, on pourrait imaginer améliorer encore le théorème en n'interdisant que les cycles de longueur entre 4 et 9. Ceci ne peut se faire avec la règle de déchargement de la preuve précédente car une face de taille 10 incidente à 10 mauvais sommets aurait une charge finale de -1. Cependant, on pourrait essayer de trouver des règles de déchargement et éventuellement une meilleure attribution de charges initiales. Cependant ce n'est pas possible dans le cas présent car il existe des graphes planaires sans cycle de longueur entre 4 et 9 qui n'ont pas de (≤ 2)-sommet ni de sommet séparateur. Voir le graphe Figure 8.1.

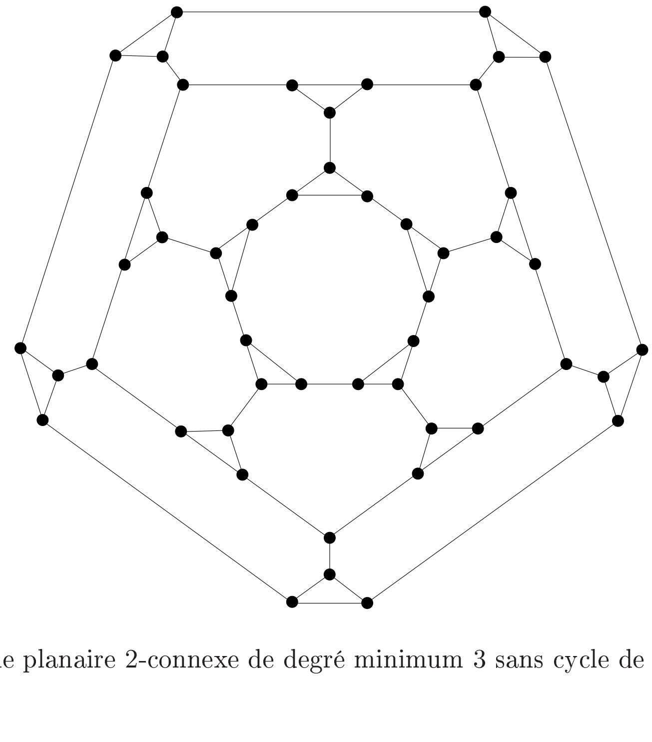

FIG. 8.1 – Un graphe planaire 2-connexe de degré minimum 3 sans cycle de longueur entre 4 et 9

8.3 Trouver de meilleures configurations réductibles

Nous venons de voir que dans certains cas, on ne peut pas améliorer le résultat simplement en changeant la partie déchargement de la preuve. Dans ces situations, on cherche à trouver de nouvelles configurations réductibles et de nouvelles règles de déchargement associées. Evidemment, on recherche ces deux choses en même temps. En effet, les règles de déchargement actuelles nous donnent des informations quant aux configurations réductibles que l'on doit rechercher.

Par exemple, Borodin, Glebov, Raspaud et Salavatipour (2003) ont de cette manière amélioré le Théorème 8.10 : ils ont montré qu'un graphe planaire sans cycle de longueur entre 4 et 8 est 3-colorable.

8.3.1 Choisissabilité impropre

Lorsque l'on regarde la preuve du Théorème 8.6, on s'apercoit que les sommets qui ont une charge finale de $\frac{8}{3}$ sont les sommets de degré 2 et les 4-sommets qui ont quatre 2-voisins et qui doivent donc donner 4α. En quelque sorte, ce sont ces 4-sommets qui empêchent de donner plus de $\frac{1}{3}$ aux 2-sommets. Nous allons maintenant montrer que de tels sommets n'existent pas et donc que les (≥ 4)-sommets peuvent donner plus de $\frac{1}{3}$.

Lemme 8.11. *Soit H un graphe 2-minimal. Alors tout (≤ 5)-sommet a au moins un (≥ 4)-voisin.*

Démonstration. Supposons qu'un (≤ 5)-sommet v n'a que des voisins de degré au plus 3. Soit $v_1, \ldots, v_p$ les voisins de v. Soit L une 2-assignation de listes. Par minimalité de H, $H - v$ admet une L-coloration 2-impropre. De plus, quitte à recolorer les v_i, nous pouvons supposer que ces sommets sont d'impropreté 1 dans cette coloration. En effet,chaque v_i a degré au plus 2 dans $H - v$. Ainsi s'il a impropreté 2, ses deux voisins sont colorés de la même manière. Donc en recolorant v_i par la deuxième couleur de sa liste, v_i a impropreté 0.

Comme $p \leq 5$ voisins, une des couleurs de $L(v)$ est attribuée à deux voisins de v au plus. Colorant v avec cette couleur, nous obtenons une L-coloration 2-impropre de H. Ainsi H est 2-improprement 2-choisissable, ce qui est une contradiction. □

Nous allons appliquer la même règle de déchargement qu'auparavant : tout sommet donne α à chacun de ses 2-voisins. Examinons les charges finales des sommets.

- Si v est un 2-sommet, alors il est adjacent à deux (≥ 4)-sommets d'après le Lemme 8.5-(ii). Donc $w(v) = 2 + 2\alpha$.
- Si v est un 3-sommet, il ne reçoit ni ne donne rien. Donc $w(v) = 3$.
- Si v est un 4- ou 5-sommet, il donne au plus α à chacun de ses 2-voisins. Il a au plus $d(v) - 1$ tels voisins d'après le Lemme 8.11. Ainsi $w(v) \geq d(v) - \alpha(d(v) - 1)) \geq \min\{4 - 3\alpha, 5 - 4\alpha\} = 4 - 3\alpha$. (On suppose là aussi $\alpha \leq 1$ car on veut $M > 8/3$.)
- Si v est un (≥ 6)-sommet alors $w(v) \geq d(v)(1 - \alpha) \geq 6(1 - \alpha)$.

Posons $M(\alpha) = \min\{2 + 2\alpha, 3, 4 - 3\alpha, 6(1 - \alpha)\}$. Alors $M(\alpha)$ est maximum pour $2 + 2\alpha = 4 - 3\alpha$, soit $\alpha = \frac{2}{5}$. On alors $M(\frac{2}{5}) = \frac{14}{5}$.

Ainsi $Ad(H) \geq \frac{14}{5}$. On en déduit que si $Mad(G) < \frac{14}{5}$ alors aucun de ses sous-graphes ne peut être 2-minimal et donc G est 2-improprement 2-choisissable.

Théorème 8.12. *Soit G un graphe. Si $Mad(G) < \frac{14}{5}$ alors G est 2-improprement 2-choisissable.*

8.4 Configurations réductibles non locales

Dans tous les exemples que nous avons vu précédemment, les configurations réductibles sont *locales* c'est-à-dire de taille bornée, et donc en nombre fini. Il se peut cependant qu'on prouve l'existence de configurations réductibles non-locales, c'est-à-dire d'une famille infinie de configurations (de taille non bornée). C'est ce que nous allons faire pour montrer le théorème suivant qui améliore le Théorème 8.12.

Théorème 8.13 (Havet et Sereni, 2003). *Soit G un graphe. Si $Mad(G) < 3$ alors G est 2-improprement 2-choisissable.*

Démonstration. L'idée est de considérer un graphe 2-minimal G et de montrer qu'il est de degré moyen au moins 3. Pour cela, nous attribuons initialement une charge de $d(v)$ à chaque sommet et nous allons effectuer une phase de déchargement à la fin de laquelle tous les sommets auront charge au moins 3.

D'après le Lemme 8.5-(i), tous les sommets de G ont degré au moins 2. Ainsi initialement, seuls les 2-sommets sont ***déficients***, (i.e. de charge inférieure à 3). Pour que la charge d'un 2-sommet passe à 3, il faudrait qu'il reçoive $\frac{1}{2}$ de chacun de ses voisins. Notons que par le Lemme 8.5-(ii), ses voisins ont degré au moins 4. Ainsi en effectuant un tel déchargement, les sommets de degré 2 ne sont plus déficients. Cependant, on peut éventuellement créer de nouveaux sommets déficients. En effet, si un 5-sommet donne 1/2 à tous ses voisins, sa nouvelle charge est de 5/2 et si un 4-sommet donne 1/2 à 3 ou 4 voisins, sa nouvelle charge est de 5/2 ou 2. Cependant, d'après le Lemme 8.11, le seul cas qui peut se produire est un 4-sommet avec trois 2-voisins qui donc à une charge de 5/2. Un tel sommet v a cependant un voisin u à qui il n'a pas donné. Nous allons vérifier qu'un tel voisin u ne peut être déficient. L'idée est donc que u donne 1/2 à v. Alors v n'est plus déficient. Mais alors v peut devenir déficient si c'était un 3-sommet, un 4-sommet ayant déjà donné 2 fois auparavant ou un 5-sommet ayant donné 4 fois auparavant. Nous allons montrer que le seul cas possible est que u soit un 4-sommet ayant déjà donné 2 fois auparavant et qui désormais a donné trois fois. Ainsi u se retrouve dans la position de v précédemment, il a donné 3 fois et est donc déficient. Le voisin t à qui u n'a pas donné va alors lui donner 1/2. Mais alors t peut devenir déficient. Nous allons de nouveau montrer que ce ne peut être le cas que si t est un 4-sommet ayant déjà donné 2 fois auparavant. Et ainsi de suite, notre graphe étant fini le processus va s'arrêter et tous les sommets auront charge au moins 3.

Afin de formaliser le processus de déchargement décrit ci-dessus, nous introduisons les semi-orientations. Un arc uv d'une semi-orientation représente un mouvement de charge de 1/2 de u vers v.

Définition 8.14. Soit G un graphe 2-minimal. Une *semi-orientation* de G est obtenue de la manière suivante :

1. Toute arête uv avec v un 2-sommet est orientée de u vers v, $(u \to v)$.
2. Tant qu'il existe une arête uv non orientée avec v un sommet de degré sortant 3, on l'oriente de u vers v.

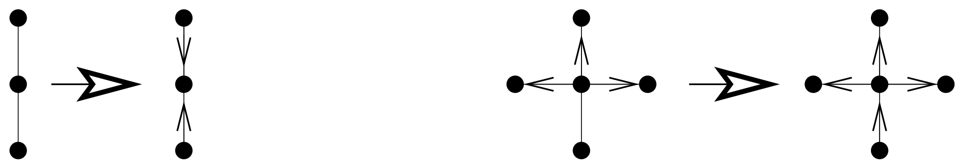

FIG. 8.2 – Transformations pour obtenir une semi-orientation

Une *arborescence* est une orientation d'un arbre A tel qu'un seul sommet r appelé *racine* ait degré interne 0. Cela revient à orienter toutes les arêtes de A de l'extrémité la plus proche de r vers l'extrémité la plus lointaine. Une *quasi-arborescence* est une graphe orienté obtenu à partir d'une arborescence en identifiant des feuilles.

Remarque 8.15.
- Dans une semi-orientation, une arête n'est orientée que dans un seul sens car deux sommets de degré 2 ne sont pas adjacents d'après le Lemme 8.5.
- Seuls les sommets de degré 2 ou 4 peuvent avoir un degré entrant non nul dans une semi-orientation.
- Une semi-orientation n'a pas de cycle orienté.
- L'ensemble des sommets $D^+(u)$ que l'on peut atteindre à partir de u dans D est une quasi-arborescence. De plus, un sommet qui n'est ni une feuille ni la racine u est un 4-sommet de degré interne 1 et degré externe 3.

Lemme 8.16. *Soit D une semi-orientation d'un graphe 2-minimal G.*
(i) Un 3-sommet a degré sortant 0.
(ii) Un 4-sommet a degré sortant au plus 3.
(iii) Un 5-sommet a degré sortant au plus 4.

Démonstration.

Pour chacune des propriétés (i), (ii) et (iii), nous allons montrer que cette propriété n'est pas vérifiée alors, pour toute 2-assignation de listes L, G admet une L-coloration 2-impropre. Ce qui contredit le fait que G soit 2-minimal.

(i) Supposons qu'un 3-sommet u ait degré sortant au moins 1. Soit v un voisin sortant de u. Soit c une L-coloration 2-impropre de $G - D^+(v)$. Montrons par récurrence que l'on peut étendre c en une L-coloration 2-impropre de G.

On étend tout d'abord c de proche en proche en une 2-coloration 2-impropre de $G \setminus uv$. A chaque étape, nous allons vérifier que les voisins externes colorés d'un sommet non encore coloré ont impropreté au plus 1.
Tout d'abord, toute feuille f de $D^+(v)$ étant un 2-sommet, elle a au plus un voisin dans $G - D^+(v)$. En prenant pour $c(f)$ avec une couleur de $L(f)$ qui n'est pas attribuée à son voisin on a alors $im(f) = 0$.
Maintenant tant que tous les sommets de $D^+(v)$ ne sont pas colorés, il existe un 4-sommet x dont les trois voisins externes dans $D^+(v)$ y_1, y_2 et y_3 sont colorés avec impropreté au plus 1. Une des deux couleurs de $L(x)$, c_x apparait au plus une fois sur les voisins de x. Ainsi posant $c(x) = c_x$, on étend 2-coloration 2-impropre telle que les voisins externes colorés d'un sommet non encore coloré ait impropreté au plus 1. En effet, si c_x n'apparait sur aucun des y_i alors $im(x) = 0$ et l'impropreté des autres sommets est inchangée. Si c_x apparait sur un des y_i disons y_1 alors $im(x) = 0$, l'impropreté de y_1 l'impropreté des autres sommets est inchangée. Comme $im(y_1)$ valait au plus 1, elle vaut alors au plus 2. Alors y_1 n'a plus de voisins non colorés car soit c'était une feuille donc un 2-sommet et ses deux voisins sont colorés (identiquement à lui), soit y_1 était un 4-sommet dont les 3 voisins externes ont été colorés avant lui et dont le voisin interne x vient d'être coloré.

Ainsi on a une coloration c de $G \setminus uv$ avec $im_{G-uv}(v) \leq 1$. Si $im_{G-uv}(u) \leq 1$ ou $c(u) \neq c(v)$ alors c est une 2-coloration 2-impropre de G. Dans le cas contraire, $im_{G-uv}(u) = 2$ donc les trois voisins de u distincts de v sont colorés $c(u)$. Recolorant u avec la couleur de $L(u) \setminus \{c(u)\}$, on a une 2-coloration 2-impropre de G.

(ii) Supposons qu'un 4-sommet u domine ses 4 voisins v_i, $1 \leq i \leq 4$. Soit c une 2-coloration 2-impropre de $G - (D^+(u)$. De manière, identique au (i), on peut étendre c en une coloration de $G - u$ telle que $im(v_i) \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq 4$. Alors une des couleurs de $L(u)$ apparait au plus 2 fois sur les v_i. Ainsi, en colorant u avec cette couleur on obtient une 2-coloration 2-impropre de G.

(iii) Identique au (ii). □

Nous pouvons maintenant effectuer la phase de déchargement en suivant une semi-orientation D : Pour chaque arc (u, v) de D, le sommet u donne $1/2$ à v. Soit w la nouvelle charge. Clairement $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} w(v)$. Examinons maintenant la charge d'un sommet v en particulier :

- Si v est un 2-sommet alors $d^+(v) = 0$ et $d^-(v) = 2$, donc $w(v) = d(v) + 2 \times 1/2 = 3$.
- Si v est un 3-sommet alors $d^+(v) = 0$ d'après le Lemme 8.16 et $d^-(v) = 0$ par construction de D, donc $w(v) = d(v) = 3$.
- Si v est un 4-sommet alors $d^+(v) \leq 3$ d'après le Lemme 8.16 et si $d^+(v) = 3$ alors $d^-(v) = 1$ par construction. Ainsi $w(v) = d(v) - (d^+(v) - d^-(v))/2 \geq 3$.
- Si v est un 4-sommet alors $d^+(v) \leq 4$ d'après le Lemme 8.16 donc $w(v) \geq d(v) - d^+(v)/2 \geq 3$.
- Si v est un ≥ 6-sommet, $w(v) \geq d(v) - d^+(v)/2 \geq d(v)/2 \geq 3$.

Ainsi pour tout sommet v, $w(v) \geq 3$. Donc $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} w(v) \geq 3|V|$. Donc G est de degré moyen au moins 3. □

8.5 Dériver un algorithme

Pratiquement toutes les preuves qui utilisent la Méthode de Déchargement sont constructives et donnent des algorithmes en temps polynomial. Le plus souvent, les configurations réductibles sont de taille bornée par une constante k et donc, en faisant une recherche exhaustive et en trouver une en temps $O(n^k)$. Cependant, la Méthode de Déchargement permet souvent de faire cela plus rapidement.

Par exemple, la preuve du Théorème 8.10 donne un algorithme récursif en $O(n^2)$ pour trouver une 3-coloration d'un graphe planaire sans cycle de longueur entre 4 et 10. Tout d'abord, si le graphe n'est pas connexe il suffit de le faire séparément pour chaque composantes connexes. Détaillons maintenant l'algorithme pour un graphe planaire connexe sans cycle de longueur entre 4 et 10.

Algorithme 8.1. Tant qu'il y a plus d'un sommet dans le graphe, on fait les opérations suivantes :

1. Trouver une configuration réductible c'est-à-dire un sommet v qui soit de degré au plus 2, soit un sommet séparateur.
2. Si $d(v) \leq 2$, chaque composante connexe de $G - v$ récursivement et étendre la coloration à v en lui donnant une des couleurs non attribuées à ses voisins.
3. Si v est un sommet séparateur, soient $C_1, \dots, C_p$ les composantes connexes de $G - v$ et pour tout $1 \leq i \leq p$ soit G_i le graphe induit par $C_i \cup \{v\}$. On colore récursivement chaque G_i. On permute éventuellement les couleurs pour que v soit coloré 1 dans tous les G_i. On obtient alors la 3-coloration de G.

L'étape 1 pourrait être faite en utilisant un algorithme générique pour trouver un sommet séparateur. Cependant, pour illustrer notre exemple (et aussi car c'est plus simple), nous allons le faire en utilisant la Méthode de Déchargement. Appliquons donc les charges initiales et effectuons la phase de déchargement suivant les règles de la preuve du Thérorème 8.10. D'après la preuve de ce théorème, un sommet doit être de charge négative et c'est nécessairement un 2-sommet ou un sommet séparateur.

Complexité de l'Algorithme 8.1 : Nous allons montrer que l'Algorithme 8.1 tourne en $O(n^2)$. Notons que dans un graphe planaire, les nombres d'arêtes et de faces sont linéaires en fonction du nombre de sommets.

Examinons le temps de calcul de la boucle sur un graphe à n sommets. Pour chaque face f cela prend $O(d(f))$ d'effectuer le déchargement. Comme seule les faces envoient des charges dans la phase de déchargement, cette phase prend au plus un temps de $O\left(\sum_{f\in F(G)} d(f)\right) = O(n)$. Ensuite on trouve un sommet de charge négative, ce qui peut se faire en $O(n)$. Ainsi l'Etape 1 se fait en $O(n)$.

Une fois, le sommet v déterminé, on peut trouver les composantes connexes de $G-v$ en $O(|E|) = O(n)$. Ensuite étendre la coloration à v se fait en temps constant si v est un deux sommet et en temps $O(n)$ si v est séparateur (dans ce dernier cas on peut être forcé de recolorer une large fraction des sommets).

Ainsi la boucle se fait en temps $O(n)$ si le graphe considéré dans la boucle à n sommets.

Soit $T(n)$ le pire temps de calcul total de l'algoritme sur un graphe à n sommets. Soit α une constante telle que chaque boucle se fasse en temps au plus αs sur un graphe d'ordre s.

Nous montrons maintenant par récurrence qu'il existe une constante C telle que $T(n) \leq Cn^2$, ce résultat étant trivial si n est petit disons $n \leq \alpha$.

Considérons les appels récursifs qui sont fait lors de la boucle de G. Si le sommet trouvé est de degré au plus 2 alors on fait un appel récursif à au plus deux graphes plus petits d'ordre n_1 et n_2 avec $n_1 + n_2 = n - 1$ (et potentiellement $n_2 = 0$ si un seul graphe). Ainsi

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \alpha n + T(n_1) + T(n_2) \leq \alpha n + Cn_1^2 + Cn_2^2 \\ &\leq \alpha n + C(n_1+n_2)^2 \leq Cn^2 \end{aligned}$$

si $2C \geq \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ puisque $n \geq \alpha$.
Si le sommet trouvé est un sommet séparateur alors l'algorithme fait p appels récursifs pour des graphes $G_1, \dots, G_p$ d'ordres respectifs $n_1, \dots, n_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1) = n-1$. Notons que $2 \leq n_i \leq n-1$. Nous avons $T(n) \leq \alpha n + \sum_{i=1}^{p} T(n_i) \leq \alpha n + C\sum_{i=1}^{p} n_i^2$. Il est facile de voir que cette dernière somme est maximisée dans le cas où $k = 2$ et n_1 ou n_2 vaut $n-1$ et l'autre 2. Ainsi $T(n) \leq \alpha n + 4C + C(n-1)^2 \leq Cn^2$ si $2C \geq \alpha + \frac{5}{2\alpha-5}$ puisque $n \geq \alpha$.

De même, on peut dériver de la preuve du Théorème 8.13 un algorithme en $O(n)$ pour trouver une 2-coloration 2-impropre d'un graphe de degré moyen maximal inférieur à 3. Pour cela il suffit de construire une semi orientation jusqu'à arriver à trouver une configuration réductible, c'est-à-dire un sommet v qui est soit un sommet degré au plus 1, soit un 3-sommet de degré sortant 1, soit un 4-sommet de degré sortant 4, soit un 5-sommet de degré sortant 5. On considère alors $D^+(v)$. On 2-colore 2-improprement $G - D^+(v)$. On étend ensuite en temps $O(D^+(v))$ cette coloration à $D^+(v)$ pour obtenir une 2-coloration 2-impropre de G.

8.6 Exercices

Exercice 8.1. Montrer que tout graphe planaire de maille 4 est 4-choisissable.

Exercice 8.2. Soit G un graphe $(4, 1)$-minimal, i.e. un graphe qui n'est pas 1-improprement 4-choisissable mais dont tous les sous-graphes stricts le sont.

1) a) Montrer que G n'a pas de (≤ 3)-sommet.
   b) Montrer que G n'a pas deux 4-sommets adjacents.
   c) En déduire que tout graphe de degré moyen maximum inférieur à $\frac{40}{9}$ est 1-improprement 4-choisissable.
2) a) Montrer que dans G un 5-sommet a au plus deux 4-voisins.
   b) En déduire que tout graphe de degré moyen maximum inférieur à $\frac{14}{3}$ est 1-improprement 4-choisissable.
3) On appelle *mauvais sommet* un 5-sommet avec deux 4-voisins.
   a) Montrer que deux mauvais sommets ne sont pas adjacents dans G.
   b) En déduire que tout graphe de degré moyen maximum inférieur à $\frac{184}{39}$ est 1-improprement 4-choisissable.

Exercice 8.3. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :
Tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 ou 5 est 1-improprement 3-colorable.

Pour cela, nous considérons un contrexemple minimal G.

1) Montrer que G satisfait les propriétés suivantes :
   a) $\delta(G) \geq 3$.
   b) G est 2-connexe.
   c) Deux 3-faces ne sont pas adjacentes (i.e. n'ont pas d'arête en commun).
   d) Deux 3-sommets ne sont pas adjacents.
   e) G ne contient pas de 3-face avec un 3-sommet et deux 4-sommets.
2) En déduire le résultat.
3) a) Dites ce qui dans la preuve ci-dessus ne s'étend pas à la 3-choisissabilité 1-impropre.
   b) Modifier la preuve pour montrer le théorème en remplaçant “colorable” par “choisissable”.

Exercice 8.4. Trouver le plus grand M possible tel que tout graphe de degré moyen maximum inférieur à M soit 1-improprement 3-choisissable.