

# Traitement du signal aléatoire

Aucun document autorisé. Durée 1<sup>H00</sup>.

Lisez attentivement les questions qui suivent. Les réponses sont usuellement brèves mais nécessitent des explications. Un résultat donné sans justification ou explication, fût-il juste, ne sera pas considéré. Agissez comme si chaque question était suivie de “pourquoi?” ou bien “expliquez!”. Par exemple si vous répondez “oui” à la question “ce signal est il ergodique?” sans expliquer la raison de cette affirmation, cette réponse sera considérée comme erronée.

**Question 1.** Qu’est-ce qu’un signal aléatoire? Que veut dire “ergodique au sens large”?

**Question 2.** Qu’est ce que “la loi des grands nombres”? En quoi cette loi est-elle fondamentale pour le traitement des signaux aléatoires?

**Question 3.** A quel condition le signal dont l’expression analytique est  $z(t) = 1.0 + 2.t + 3.t^2$  où  $t$  est le temps pourrait-il être ergodique au sens large?

**Question 4.** Qu’est-ce que la transformée de Fourier d’un signal aléatoire?

**Question 5.** Que veut dire “estimer une courbe au sens des moindres carrés”? Á quoi cela sert-il de rendre un estimateur moindres carrés récursif?

**Question 6.** Soient trois points de coordonnées respectives  $(1, 1)$ ,  $(2, 3)$  et  $(3, 2)$ , donnez les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  de la droite moindres carrés d’équation  $a.x + b.y = 1$  passant au plus près de ces points.

Soit le filtre numérique à réponse impulsionnelle finie  $h_k$  défini par :

$$h_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k > 3 \\ 1 & \text{si } k \in [0, 1] \\ -1 & \text{si } k \in [2, 3] \end{cases}$$

On utilise cette réponse impulsionnelle pour filtrer un signal, issu d’une séquence pseudo-aléatoire,  $x_k$  stationnaire au sens large de moyenne  $m_x$  et d’écart-type  $\sigma_x$ .

**Question 7.** Rappelez ce qu’est une séquence pseudo-aléatoire et comment elle peut être obtenue.

Le signal échantillonné  $y_k$  obtenu en sortie de ce filtre est donc la convolution de la séquence  $x_k$  et de la séquence  $h_k$ .

**Question 8.** Donnez l’équation de  $y_k$  en fonction de  $x_k$ ,  $x_{k-1}$ ,  $x_{k-2}$  et  $x_{k-3}$ .

**Question 9.** Montrez que la moyenne statistique de  $y_k$  en régime stationnaire est nulle.

**Question 10.** En supposant que  $x_k$  est un bruit blanc, donnez la fonction de covariance  $R_{yx}(\tau)$  entre  $y_k$  et  $x_k$ .

**Question 11.** Donnez la variance de  $y_k$ .

**Question 12.** Qu’est-ce qu’un filtre adapté? A quoi cela peut il servir? Donnez l’expression du signal auquel le filtre de réponse impulsionnelle  $h_k$  est adapté.

**Question 13.** En travaux pratiques on a pu remarquer que la fonction d'auto-covariance du bruit étudié avait plus ou moins la forme d'un sinus cardinal alors que le signal étudié était un bruit blanc. Quelle aurait du être la forme de la fonction d'auto-covariance de ce bruit ? Pourquoi a-t-elle la forme d'un sinus cardinal ?

**Question 14.** Qu'est-ce qu'un filtre symétrique ? Quelle en est l'utilité ? Dans quel cas on ne peut pas utiliser de filtre symétrique ?

**Question 15.** Qu'est-ce qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie ?

**Question 16.** Si  $H(z)$  est la fonction de transfert (en  $z$ ) d'un filtre à réponse impulsionnelle finie,  $G(z) = \frac{1}{H(z)}$  est-il lui aussi à réponse impulsionnelle finie ? Pourquoi ?