Version tropicale du théorème de Putinar.

Applications à l'optimisation globale.

Nicolas Delanoue

LARIS - Universite d'Angers - France

Journée Programmation mathématique non linéaire
(axe PMNL du GDR RO)
LIRMM, Montpellier - 26 octobre 2022

Outline

1. Positivstellensatz
   - Certificat de positivité
   - Théorème de Putinar
2. Algèbre tropicale
   - Formalisme
   - Version tropicale du théorème de Putinar
3. Dualité
   - Crochet de dualité fonctions/mesures
   - Problème généralisé des moments
   - Exemple : transport optimal
4. Conclusion

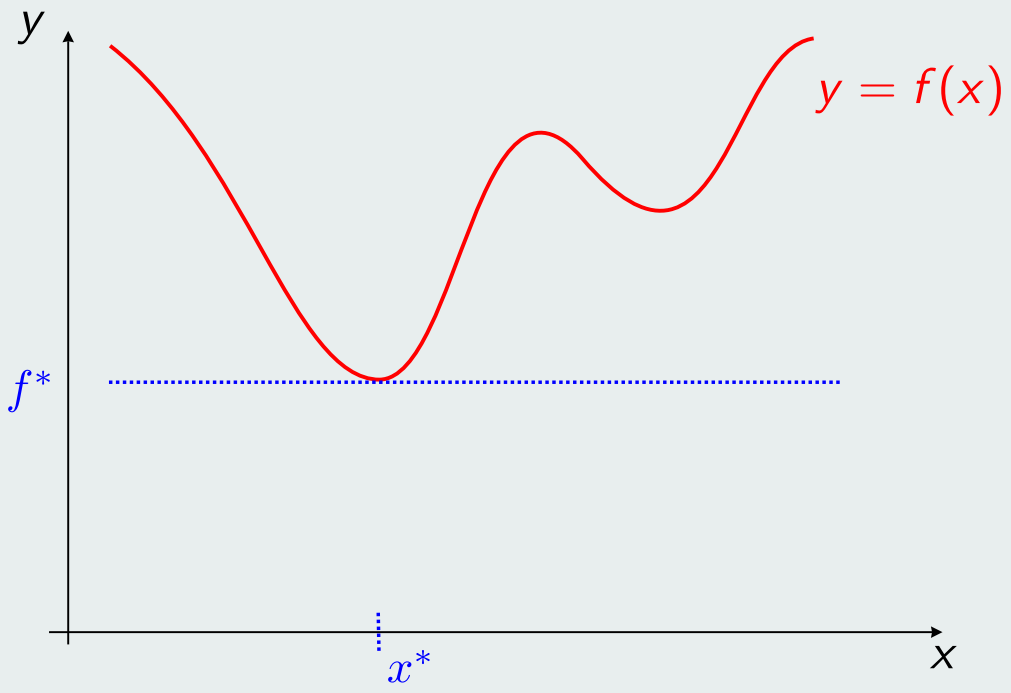
Problème d'optimisation

Soit f une fonction continue à valeur réelle. Considérons le problème

$$f^* = \inf_{x \in K} f(x) \tag{1}$$

où $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, j = 1, \ldots, m\}$ est compact.

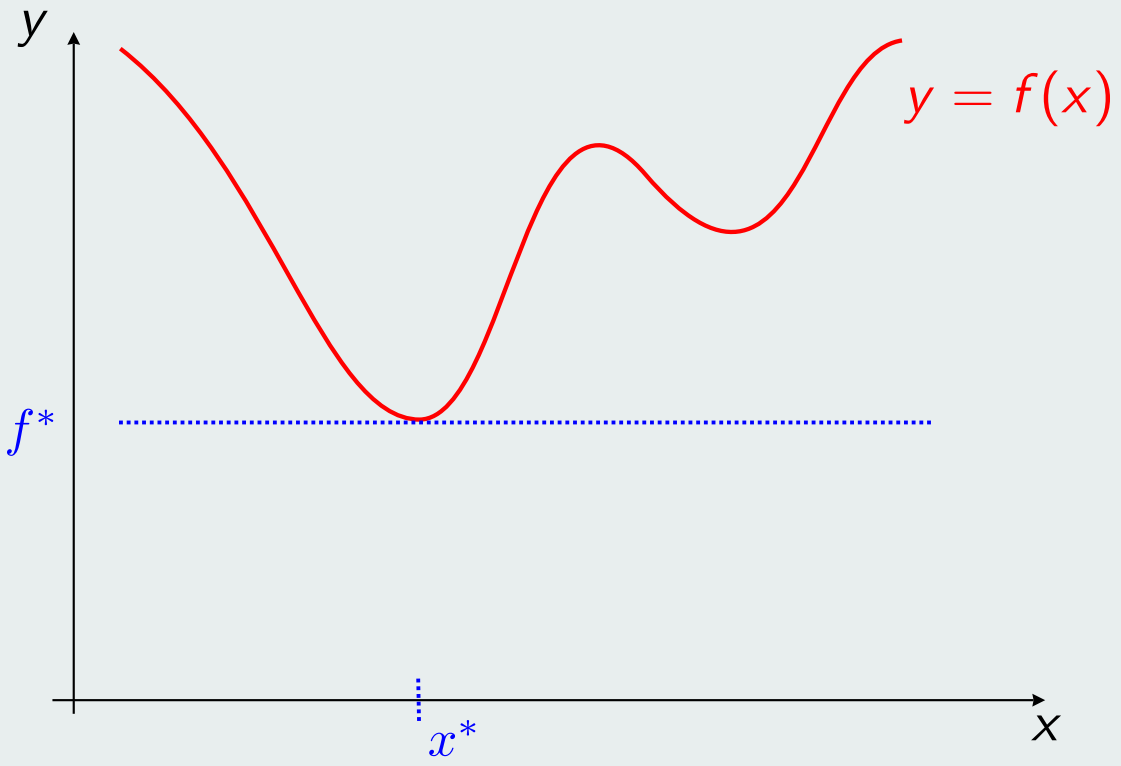
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

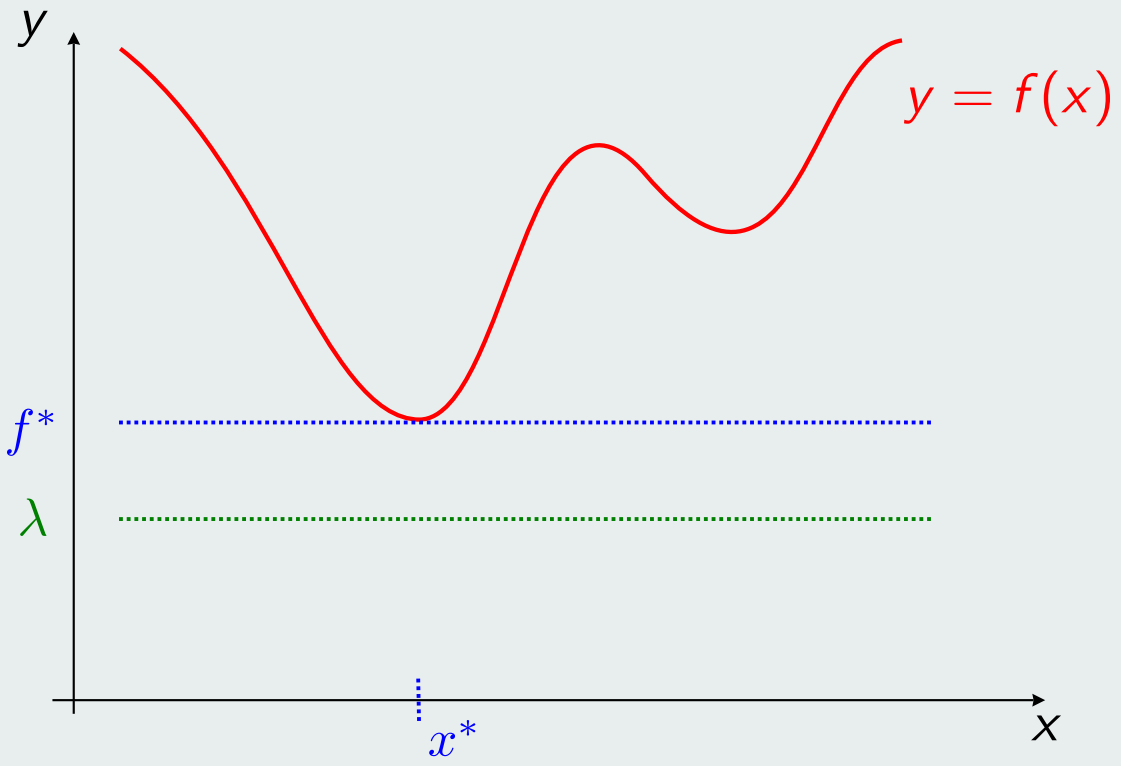
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

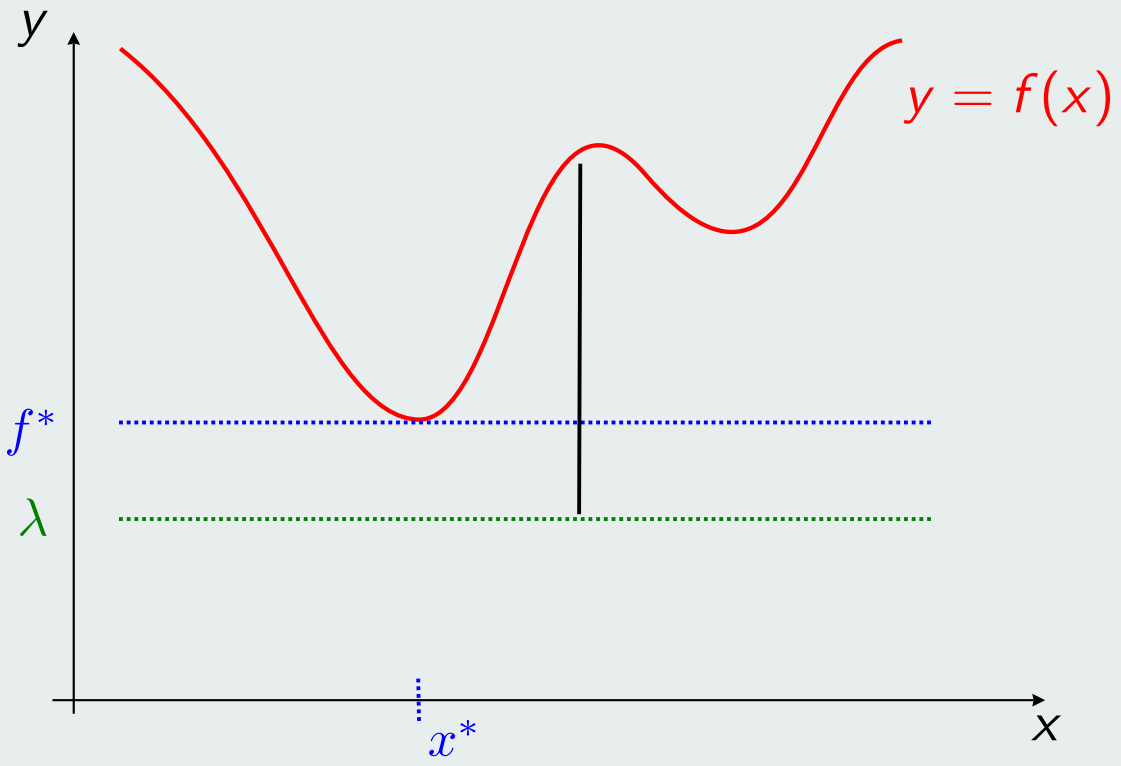
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

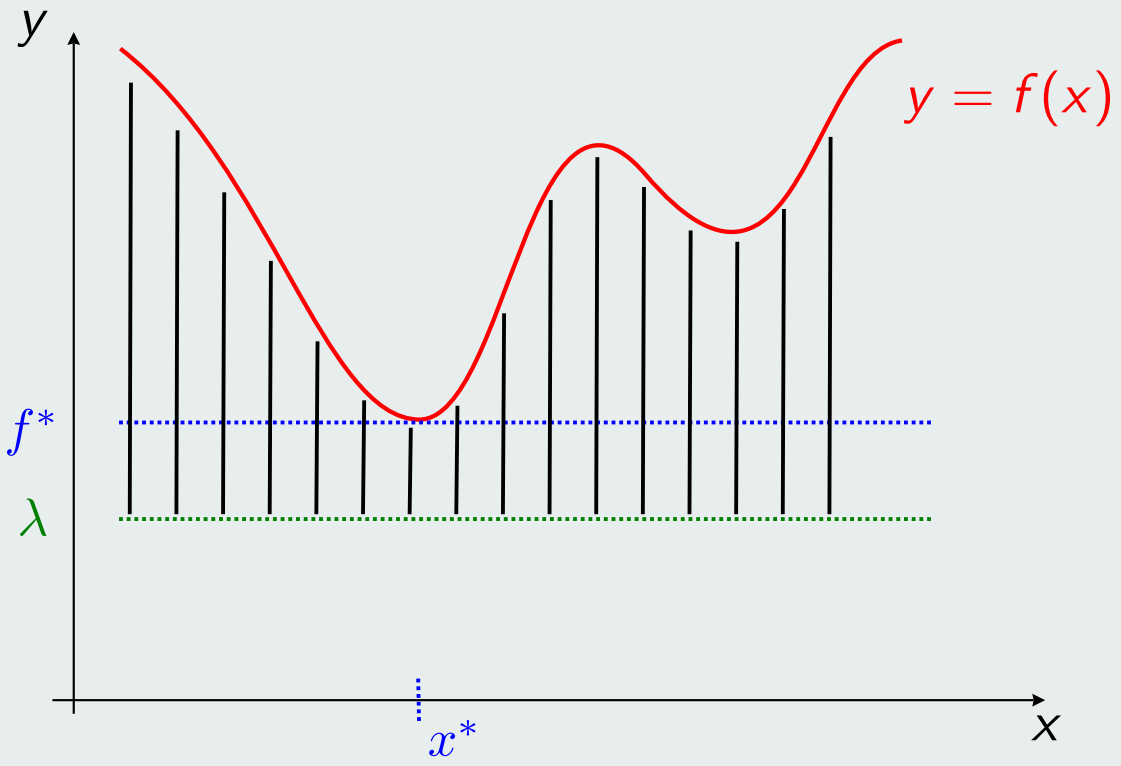
Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

Illustration - Exemple en dimension 1



Proposition

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{2}$$

Illustration - Exemple en dimension 1

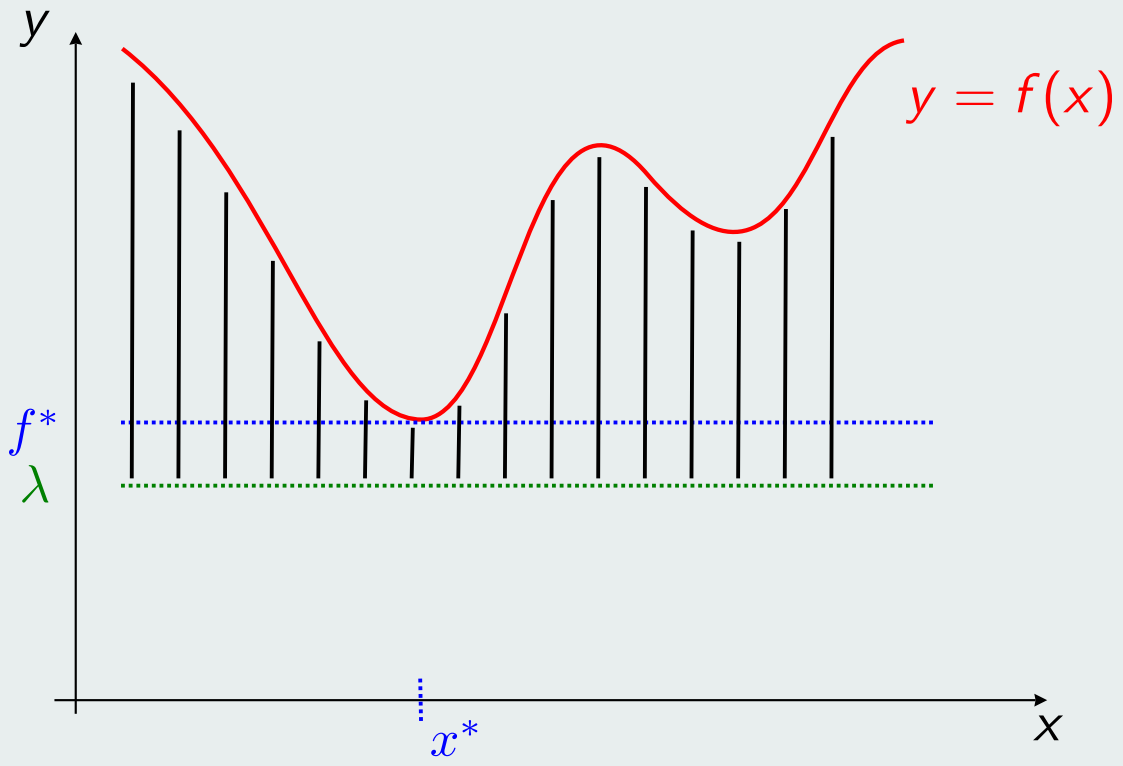
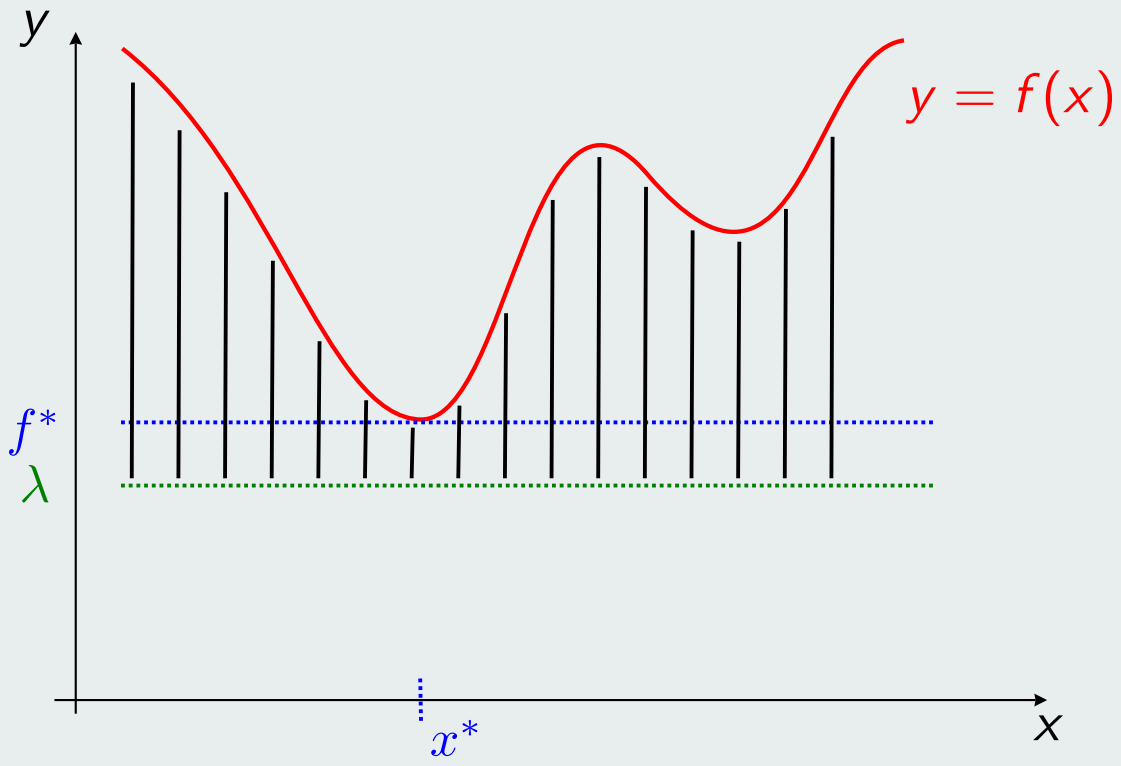


Illustration - Exemple en dimension 1



Remarques

- (2) est un problème linéaire avec une infinité de contraintes.
- (2) est le dual d'un autre (fin de la présentation).
- Décider si une fonction f est positive sur un ensemble K est fondamental.

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit

$$f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit

$$f(x,y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$

f s'écrit aussi

$$f(x,y) = (2x^2 - 3y^2 + xy)^2 + (y^2 + 3xy)^2.$$

Définition

Un certificat de positivité est une manière d'écrire une fonction de sorte que sa positivité devienne évidente.

Exemple

Soit

$$f(x,y) = 4x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 + 10y^4,$$

f s'écrit aussi

$$f(x,y) = (2x^2 - 3y^2 + xy)^2 + (y^2 + 3xy)^2.$$

f est une somme de carrés, donc f est positive.

Définition

On note par $\Sigma[x]$ l'ensemble des polynomes qui s'écrivent comme une somme de carrés.

Remarque

Un élément f de $\Sigma[x]$ est qualifié de SOS pour *Sum Of Squares*.

Définition

En géométrie algébrique réelle, un Positivstellensatz est une caractérisation les polynômes *positifs* sur un ensemble K.

Théorème (Positivstellensatz dimension 1)

Un polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ est positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement

$$f = \sigma_0 \text{ avec } \sigma_0 \in \Sigma[x].$$

Remarques

Le théorème précédent se généralise de plusieurs manières :

- pour certaines dimensions et degrés,
- avec des contraintes sur x (i.e. $x \in K$).

Théorème (Positivstellensatz dimension 1 avec contrainte)

Soit $p \in \mathbb{R}[x]$, p est positif sur $K = [-1, 1]$ si et seulement si

$$p = \sigma_0 + (1 - x^2)\sigma_1 \text{ avec } \sigma_0, \sigma_1 \in \Sigma[x].$$

Remarque

$K = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\}$

Exemple

$f(x) = -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ est positif sur $[-1, 1]$ car
$f(x) = \sigma_0 + (1 - x^2)\sigma_1$ avec $\sigma_0 = x^2, \sigma_1 = (1 + x)^2$

Définition

Un ensemble K est semi-algébrique basique s'il s'écrit

$$K = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n ; g_j(x) \geq 0\} \tag{3}$$

avec $g_j \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemples

1. $K_1 = [-1, 1]$ est semi-algébrique basique car $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\}$.
2. Les polyèdres sont des semi-algébriques basiques,
3. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \text{ ou } x \geq 0\}$ est semi-algébrique mais pas basique.

Théorème de Putinar

Soit K un semi-algébrique basique vérifiant une hypothèse de compacité α. $\forall x \in K, f(x) > 0$ si seulement si

$$f = \sigma_0 + \sum_j \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Schmüdgen's Positivstellensatz

Soit K un semi-algébrique basique. $\forall x \in K, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f = \sigma_0 + \sum_{J \subset \{1,\ldots,m\}} \sigma_J g_J \text{ avec } \sigma_J \in \Sigma[x].$$

où chaque g_J est défini par

$$g_J = \prod_{j \in J} g_j.$$

Remarque

Comme $\sigma \in \Sigma[x] \Leftrightarrow Q(\sigma) \succeq 0$, décider qu'un polynome f est positif sur K s'écrit sous la forme d'un problème convexe.

Remarques : Bornes sur le degré des σ_j

$$\deg(\sigma_j g_j) \leq c \exp\left(\left(d^2 n^d \frac{\|f_0\|}{f^*}\right)^c\right)$$

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Exemple

- $2 \oplus 3 = 3$,

Définition

Le semi anneau tropical $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ est le semi anneau muni des lois de compositions internes :

- $x \oplus y = \max\{x, y\}$,
- $x \otimes y = x + y$.

Exemple

- $2 \oplus 3 = 3$,
- $2 \otimes 3 = 5$.

Remarques

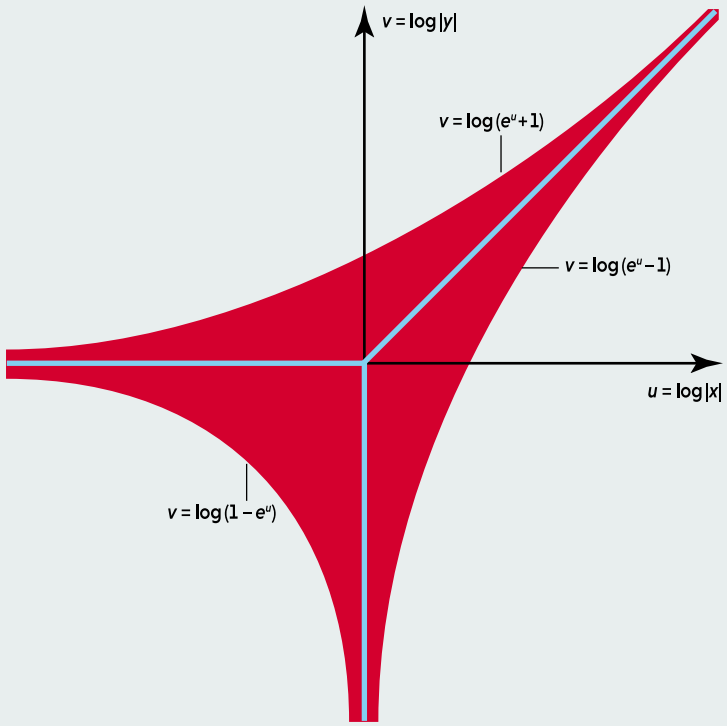
- Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont nommées respectivement addition et multiplication tropicales,
- L'élément de neutre pour $\oplus$ est $-\infty$,
- L'élément de neutre $\otimes$ est 0.

Première lecture

Géométrie algébrique tropicale [a]

a. A. Chambert-Loir, *Quand la géométrie devient tropicale*, Pour la sciences 2018.

Exemple de variété algébrique tropicale



Programmation dynamique

- L'algorithme du plus court chemin de Bellman peut être vue comme un système dynamique $x_{n+1} = Ax_n$ dans $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.
- Optimal control (Hamilton-Jacobi-Bellman) [a]

a. M. Akian et al, *The Max-Plus Finite Element Method for Solving Deterministic Optimal Control Problems : Basic Properties and Convergence Analysis*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2006

Remarques

- Une fonction à valeur réelle s'étend naturellement en une fonction à valeur dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$,
- *i.e.* on peut donc munir l'ensemble des fonctions à valeur réelle d'une structure tropicale.
- Finalement, on peut donc écrire $f_1 \oplus f_2$ ou encore $f_1 \otimes f_2$.

Putinar tropical

Soient $(g_i)_{i=1}^m$ une famille de fonctions continues et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact.
$\forall x \in X, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \tag{4}$$

où $\mathcal{C}^+$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux.

Putinar tropical

Soient $(g_i)_{i=1}^m$ une famille de fonctions continues et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact.
$\forall x \in X, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \tag{4}$$

où $\mathcal{C}^+$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux.

Comparaison avec Putinar "classique"

$$f = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Putinar tropical

Soient $(g_i)_{i=1}^m$ une famille de fonctions continues et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact.
$\forall x \in X, f(x) > 0$ si et seulement si

$$f \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \tag{4}$$

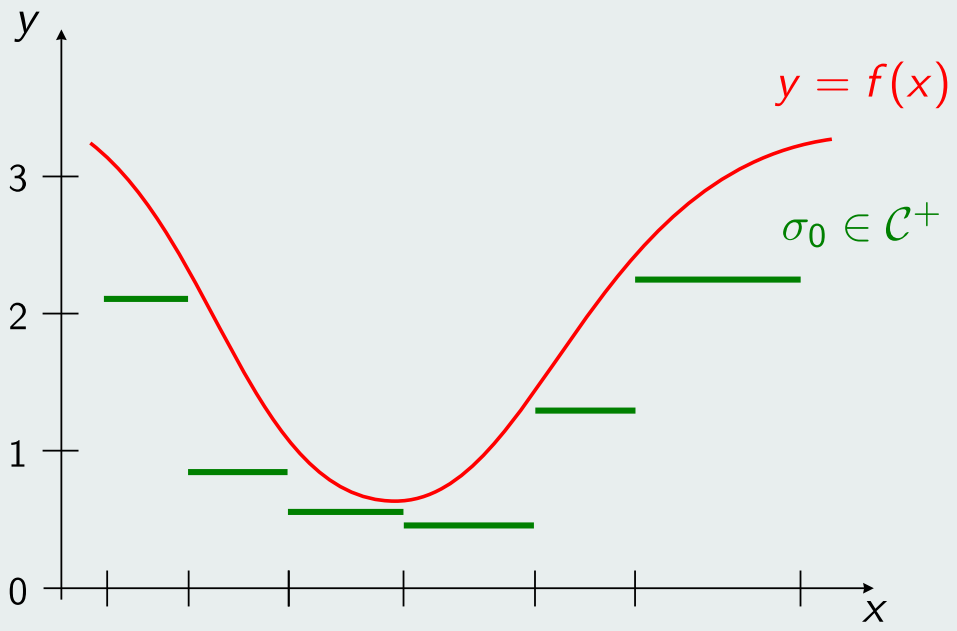
où $\mathcal{C}^+$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux.

Comparaison avec Putinar "classique"

$$f = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

$$f + \sum_{j=1}^{m} -\sigma_j g_j = \sigma_0 \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x].$$

Illustration - Exemple en dimension 1



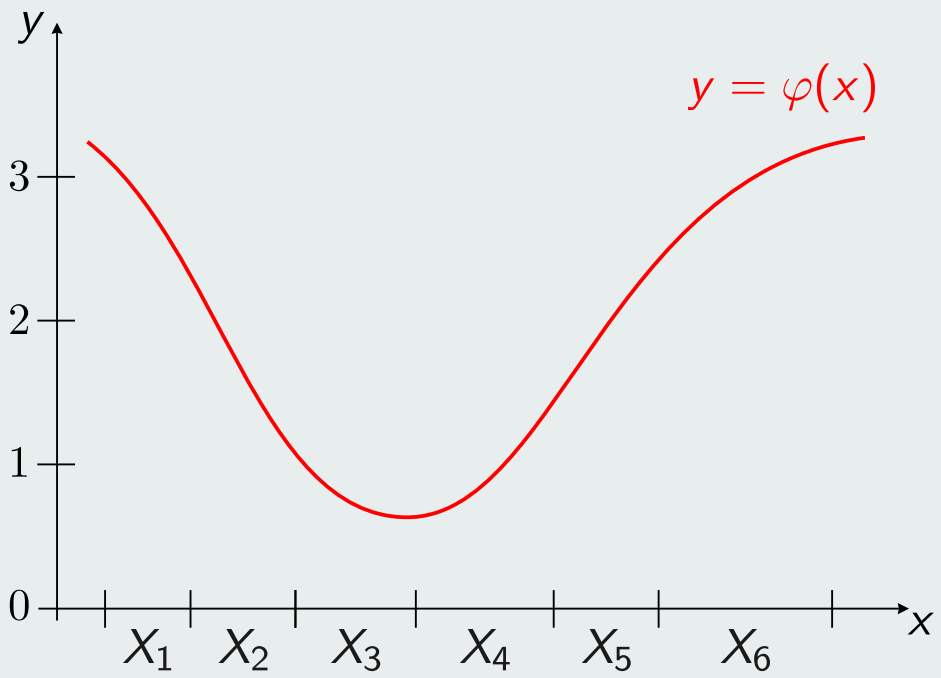
Exemple

$f \geq \sigma_0$ et $\sigma_0 \in \mathcal{C}^+$, donc f est positive.

Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

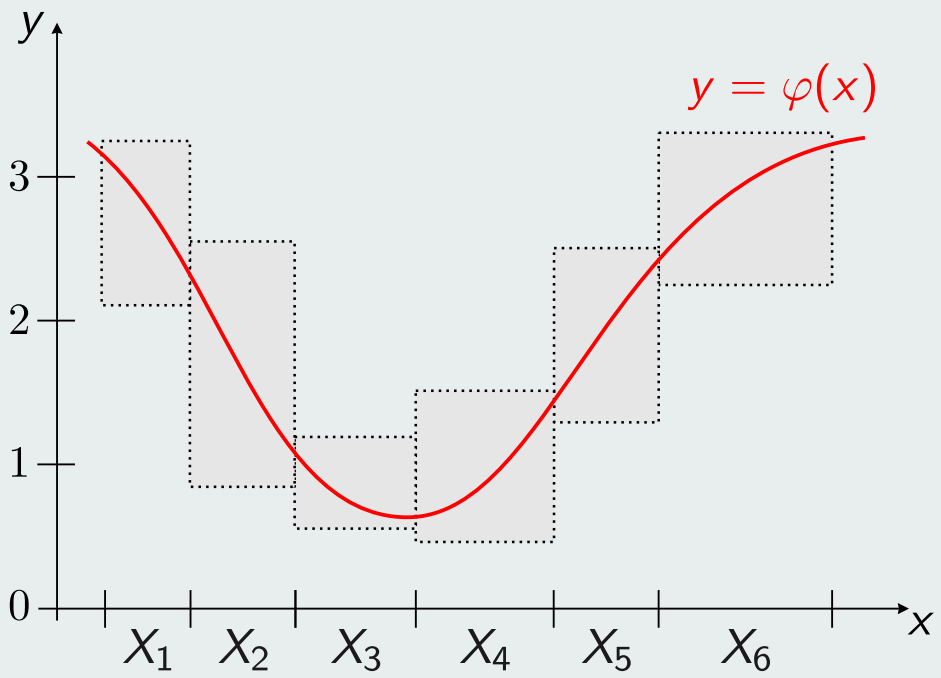
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

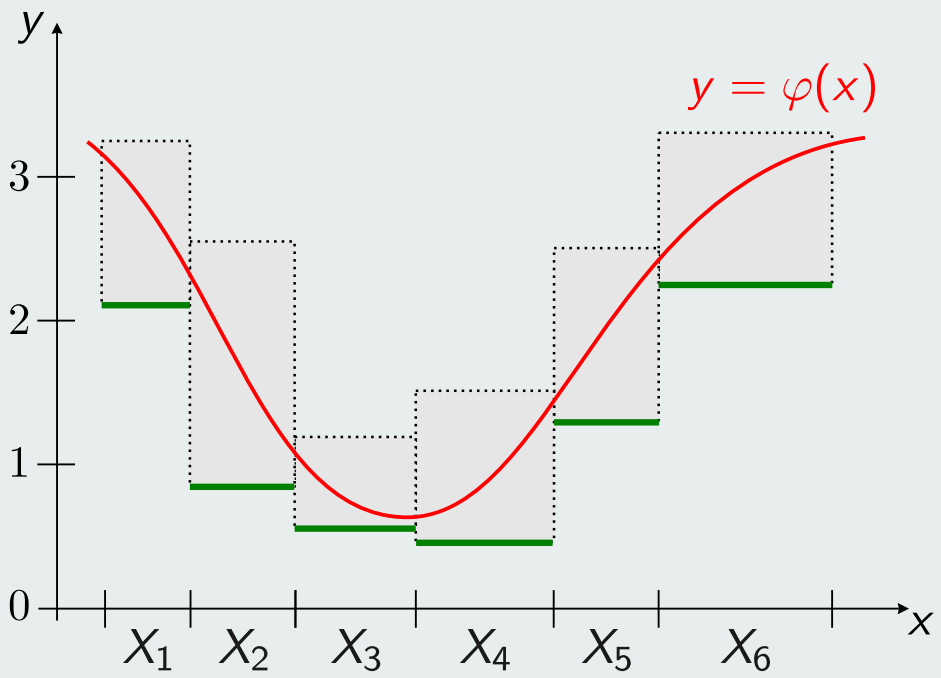
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

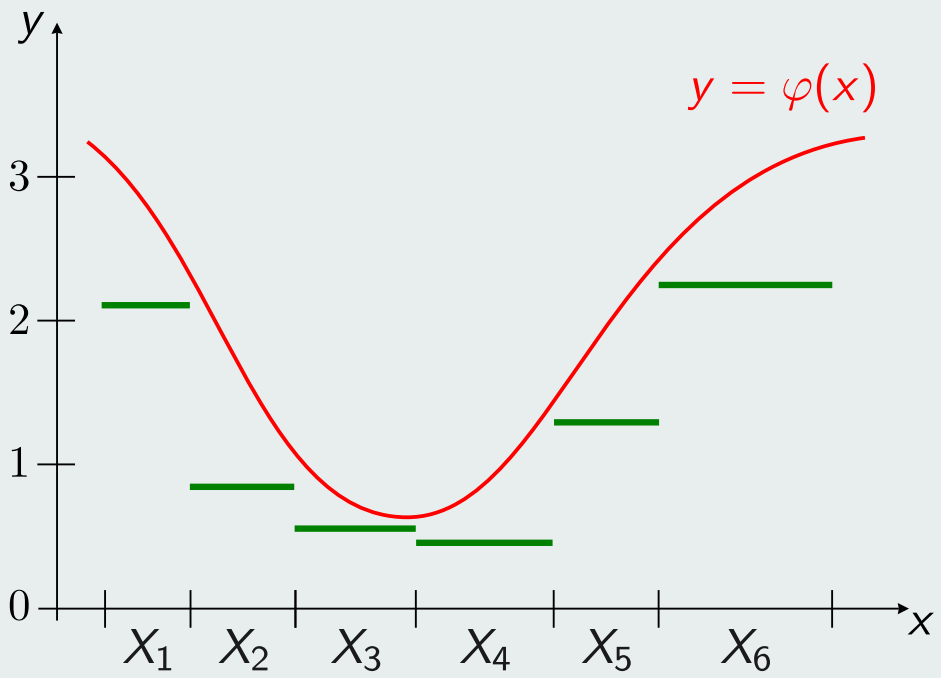
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

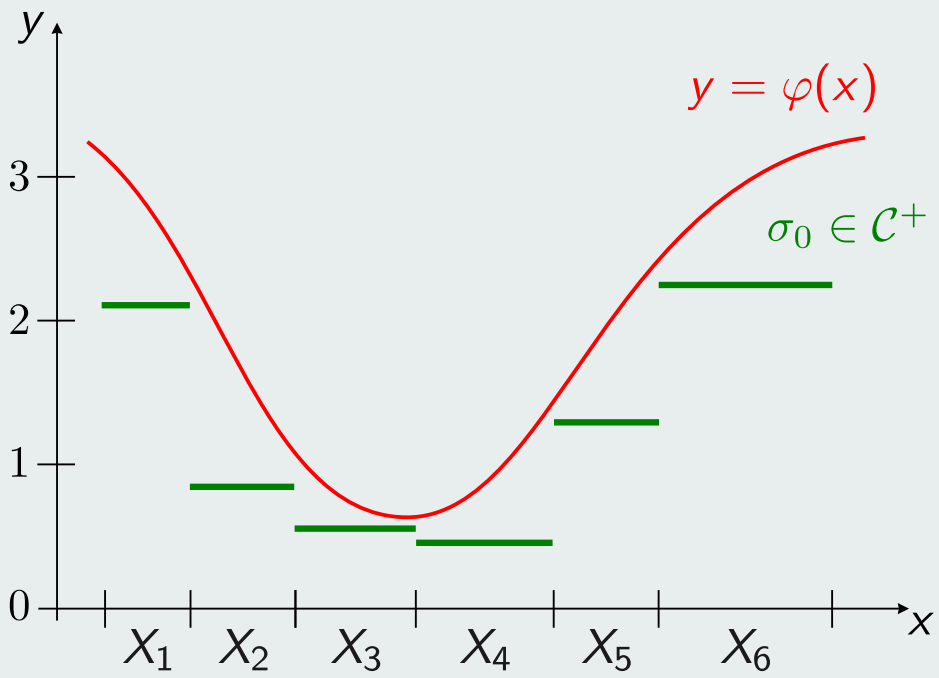
Illustration



Remarques

- D'un point de vue effectif et algorithmique, les fonctions σ_j peuvent être obtenues grâce aux calculs par intervalles.
- Cela converge génériquement.
- Le temps de calcul dépend de f et de la qualité de fonction d'inclusion.

Illustration



Comme présenter en introduction,

$$f^* = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \text{ tel que } f(x) - \lambda \geq 0, \ \forall x \in K\}. \tag{5}$$

Dualité

Le problème (5) est le dual du problème primal suivant

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} \quad & \int_K f \mathrm{d}\mu \\ \text{tel que} \quad & \int_K \mathrm{d}\mu = 1 \text{ et } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}(K)$ désigne l'ensemble des mesures signées avec K comme support.

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$, et $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$, alors

$$yb \leq cx$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$, et $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$, alors

$$yb \leq cx$$

Preuve

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$, et $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$, alors

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$, et $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$, alors

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax \Rightarrow yb \leq yAx$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$, et $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$, alors

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax \Rightarrow yb \leq yAx \leq cx$$

1. En dimension finie :

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

2. Optimisation continue :

Problème primal

$$\begin{aligned} \inf_{\mu\in\mathcal{M}(K)} \quad & \int_K f \mathrm{d}\mu \\ \text{tel que} \quad & \int_K 1 \mathrm{d}\mu = 1, \\ & \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^1} \quad & \lambda 1 \\ \text{tel que} \quad & \lambda 1 \leq f(x), \forall x \in K \end{aligned}$$

Remarques

- Les théorèmes Positivstellensatz précédemment présentés peut être "transportés" par cette dualité et faire apparaitre de contraintes sur les mesures (et leurs moments),
- Inversement, des problèmes d'optimisation convexes portant sur les mesures peuvent être "naturellement" relacher et discrétiser à partir de cette dualité, on parle de hiérarchie de Lasserre.

Problème généralisé des moments

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème généralisé des moments

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème généralisé des moments

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

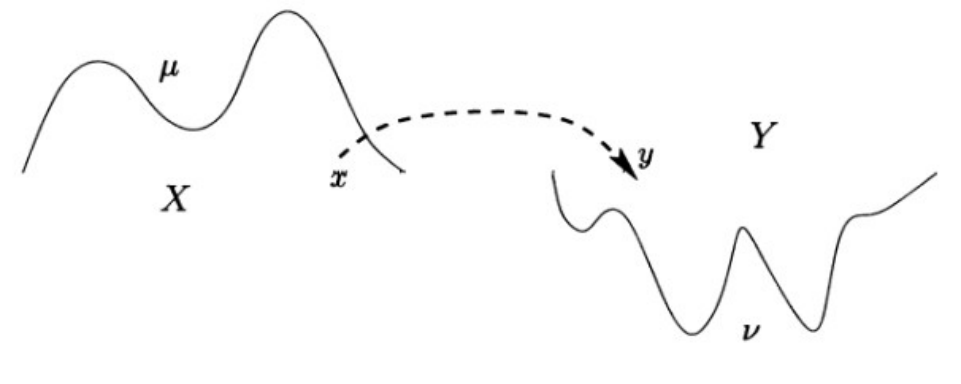
- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Formulation de Kantorovich

La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est le réel

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\mathcal{M}(X\times Y)} & \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{6}$$



Formulation de Kantorovich

La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est le réel

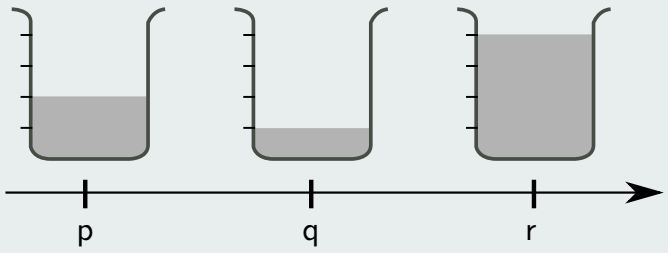
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\mathcal{M}(X\times Y)} & \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Le problème (35) est un problème généralisé des moments, *i.e.*

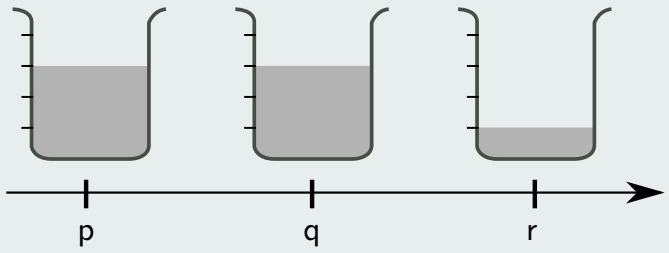
- la fonction cout est linéaire en π,
- les contraintes sur π sont des fonctions linéaires.

Linear Programming in Infinite Dimensional Spaces : Theory and Applications Edward J. Anderson, Peter Nash

Exemple dans le cas discret



$\mu = (2, 1, 4)$



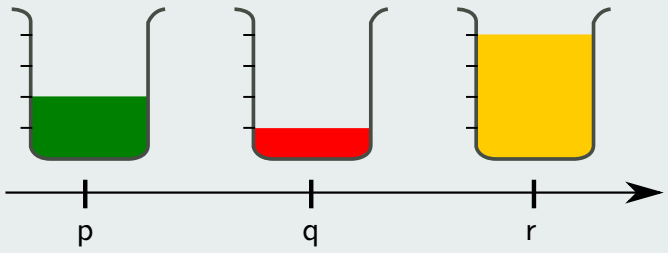
$\nu = (3, 3, 1)$

Problème de transport

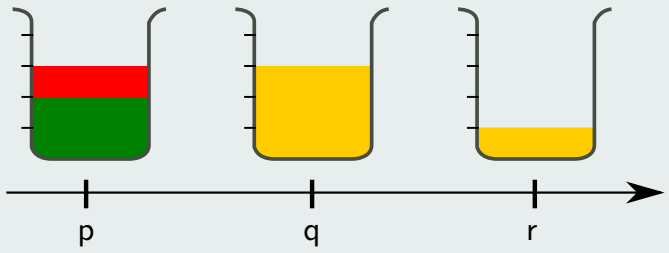
	3	3	1
2	π_{11}	π_{12}	π_{13}
1	π_{21}	π_{22}	π_{23}
4	π_{31}	π_{32}	π_{33}

tel que $\begin{cases} \forall i,\ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j,\ \sum_i \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$

Exemple dans le cas discret



$\mu = (2, 1, 4)$



$\nu = (3, 3, 1)$

Une solution au problème de transport

	3	3	1
2	2	0	0
1	1	0	0
4	0	3	1

vérifie $\begin{cases} \forall i,\ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j,\ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$

Un problème de transport

	3	3	1
2	.	.	.
1	.	.	.
4	.	.	.

Un problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{array}$$

peut admettre plusieurs solutions :

$$\pi = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}, \quad \tilde{\pi} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}, \ldots$$

Définition - Transport

Un transport π est une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ vérifiant

$$\begin{cases} \pi(A \times Y) = \mu(A), \\ \pi(X \times B) = \nu(B). \end{cases} \quad \text{pour tous } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

Définition - Transport

Un transport π est une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ vérifiant

$$\begin{cases} \pi(A \times Y) = \mu(A), \\ \pi(X \times B) = \nu(B). \end{cases} \quad \text{pour tous } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

Notation

Les relations de l'équation (7) se note aussi

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases} \tag{8}$$

Dans le cas discret

$$\begin{cases} \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j, \ \sum_i \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	300	200	500
200	·	·	·
100	·	·	·
700	·	·	·

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	·	·	·
0.1	·	·	·
0.7	·	·	·

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	0.06	0.04	0.10
0.1	.	.	.
0.7	.	.	.

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	0.06	0.04	0.10
0.1	0.03	0.02	0.05
0.7	0.21	0.14	0.35

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	300	200	500
200	60	40	100
100	30	20	50
700	210	140	350

Comparer deux transports

Transport π

$$\pi = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

$$I(\pi) = 2 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0 = 4$$

Transport $\tilde{\pi}$

$$\tilde{\pi} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$I(\tilde{\pi}) = 8$$

Dans le cas discret

$$\begin{aligned} \min_{\pi \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij} \\ \text{tel que} \quad & \forall i, \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ & \forall j, \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{aligned} \tag{9}$$

où $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ est le cout du transport d'une masse unitaire de la position i à la position j.

Dans le cas discret

$$\begin{aligned} \min_{\pi \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i,j} c_{ij}\pi_{ij} \\ \text{tel que} \quad & \forall i, \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ & \forall j, \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{aligned} \tag{9}$$

où $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ est le cout du transport d'une masse unitaire de la position i à la position j.

Formulation de Kantorovich

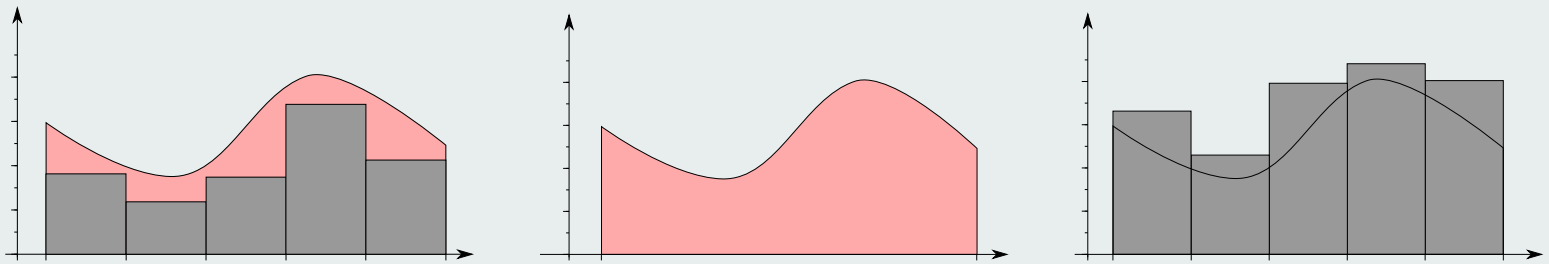
La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est le réel

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)} \quad & \int_{X \times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{10}$$

Lemme - Encadrement

Soit $\{X_i\}_i$ une partition de X, si $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ et $[\varphi]$ une fonction d'inclusion pour φ alors

$$\sum_i \underline{\varphi}(X_i)\mu(X_i) \leq \int_X \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \sum_i \overline{\varphi}(X_i)\mu(X_i).$$



Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \in [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$, $\nu(Y_j) \in [\underline{\nu}_j, \overline{\nu}_j]$,
- $\forall (x,y) \in X_i \times Y_j, \underline{c}_{ij} \leq c(x,y)$,

Si

$$\underline{\mathcal{T}} = \min_{\pi_{ij} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \sum_{i,j} \underline{c}_{ij} \pi_{ij}$$

tel que

$$\forall i,\ \underline{\mu}_i \leq \sum_j \pi_{ij} \leq \overline{\mu}_i,$$

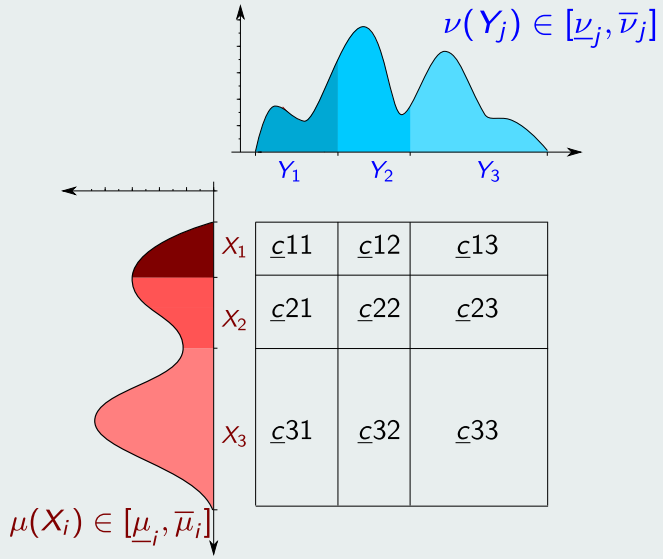
$$\forall j,\ \underline{\nu}_j \leq \sum_i \pi_{ij} \leq \overline{\nu}_j,$$

$$\forall i, \forall j,\ \pi_{ij} \geq 0.$$

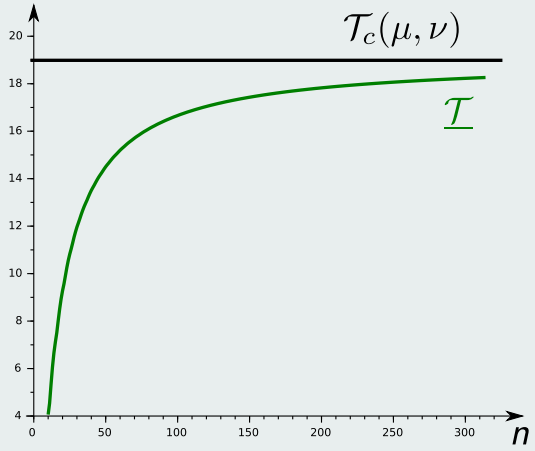
alors

$$\underline{\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}_c(\mu, \nu).$$

Discrétisation spatiale



Résultats : bornes inférieures



Problème primal

$$\begin{aligned} \inf_{\pi \in \mathcal{M}^+(X \times Y)} \quad & \int_{X \times Y} c(x,y) \mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \sup_{\phi, \psi \in \mathcal{C}_b(X,Y)} \quad & \int_X \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y) \, \mathrm{d}\nu(y) \\ \text{tel que} \quad & \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y). \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_b(X, Y)$ désigne l'ensemble des couples (ϕ, ψ) de fonctions bornées et continues $\phi : X \to \mathbb{R}$ et $\psi : Y \to \mathbb{R}$.

Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \leq \overline{\mu}_i$, $\nu(Y_j) \leq \overline{\nu}_j$,
- $\forall x, y \in X_i \times Y_j, c(x,y) \leq \overline{c}_{ij}$.

Si

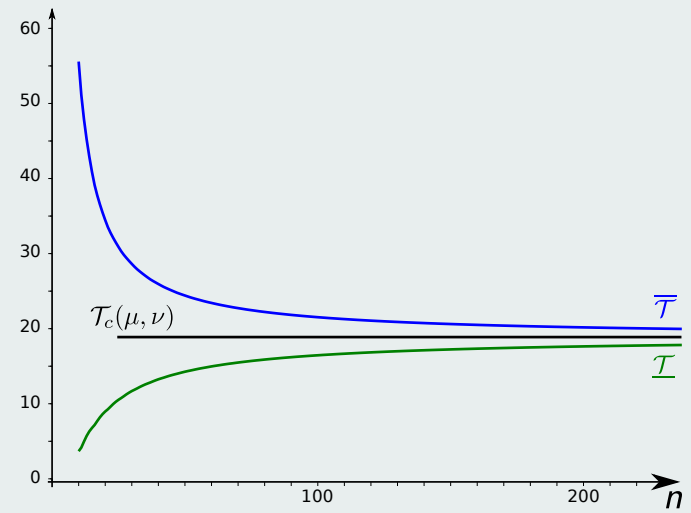
$$\overline{\mathcal{T}} = \sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n, (\psi_j)\in\mathbb{R}^n} \sum_i \phi_i \overline{\mu}_i + \sum_j \psi_j \overline{\nu}_i$$

tel que $\phi_i + \psi_j \leq \overline{c}_{ij}$

alors

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) \leq \overline{\mathcal{T}}.$$

Résultats : bornes supérieures



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, et Philippe Lucidarme. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, 63(3) :855-873, 2016.

Système dynamique contrôlé

$$x(0) = x_0, \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \forall t \in [0, T],$$

Avec t le temps, x l'état, f la dynamique, u le contrôle.

Système dynamique contrôlé

$$x(0) = x_0, \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \forall t \in [0, T],$$

Avec t le temps, x l'état, f la dynamique, u le contrôle.

Problème de contrôle optimal

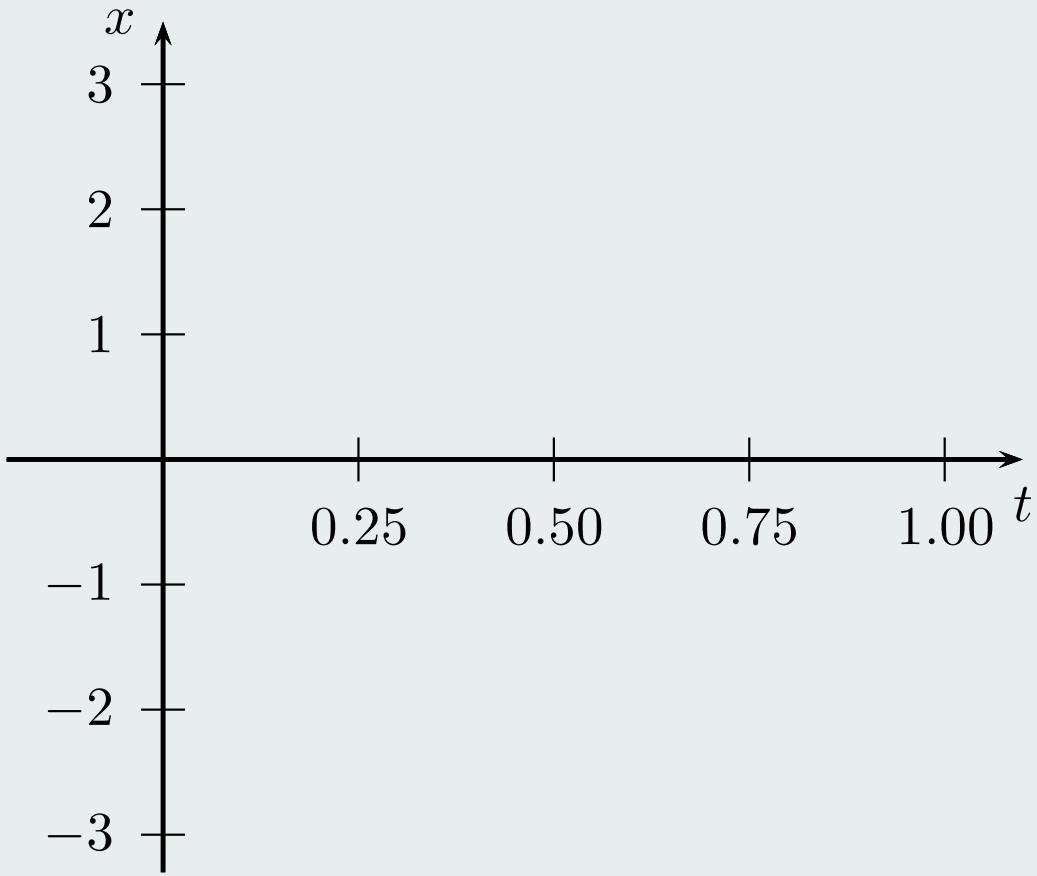
$$J_1^* = \min_{u:[0,T]\to U} \int_0^T h(t, x(t), u(t))dt + H(x(T))$$

tel que $x(0) = x_0, \dot{x} = f(x, u), \forall t \in [0, T],$

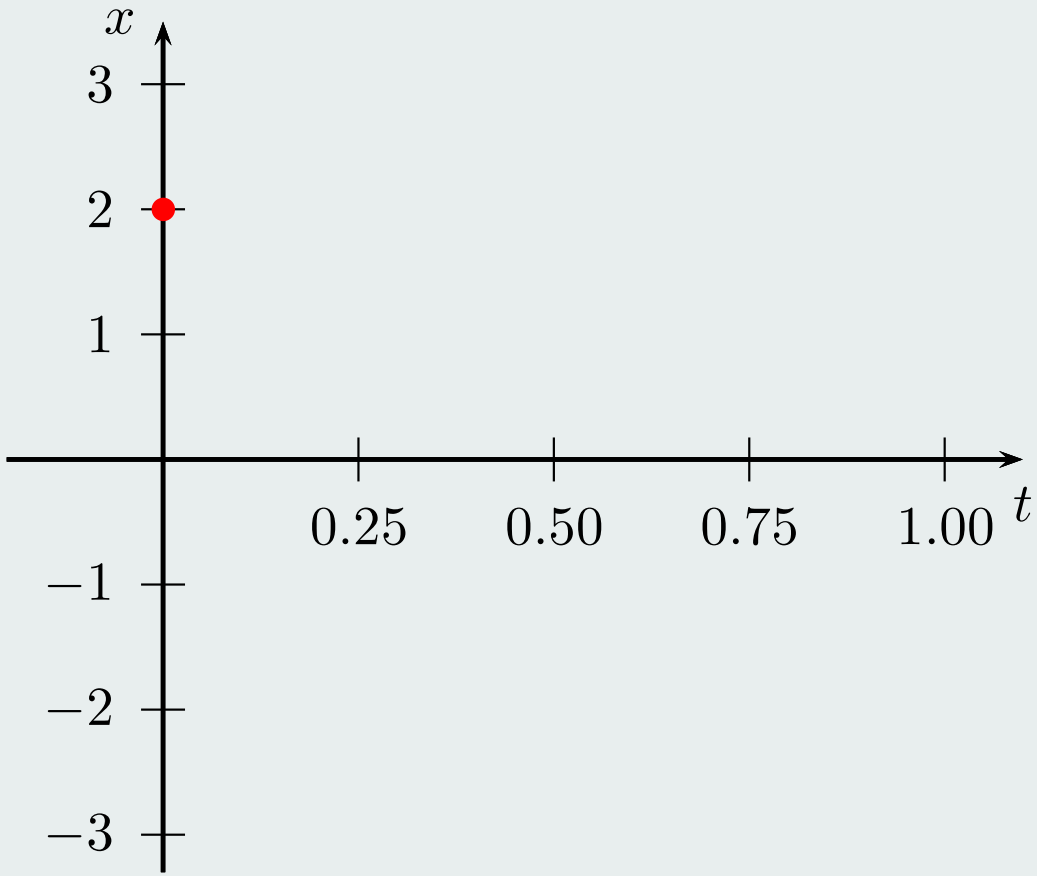
$x(t) \in X, \forall t \in [0, T], x(T) \in K.$

Avec $T \geq 0$, U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$, h et H des fonctions à valeurs réelles.

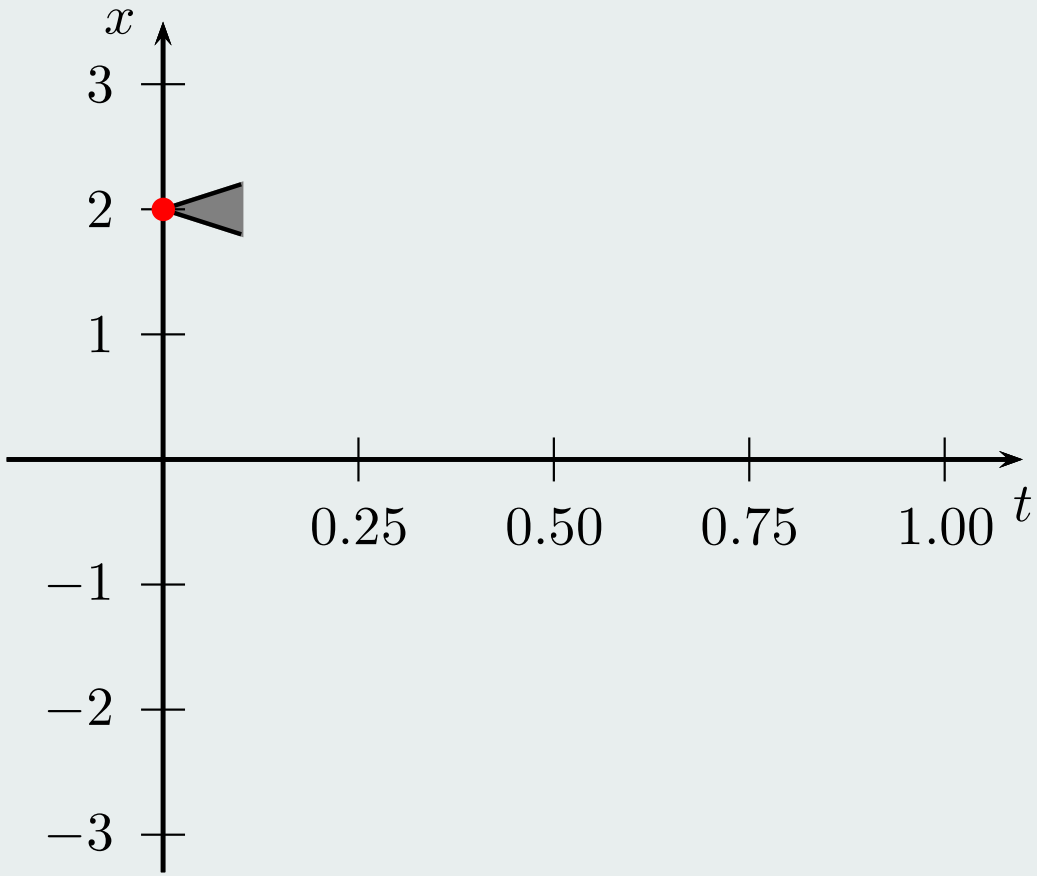
$$\begin{cases} x(0) & = & 2 \\ \dot{x}(t) & = & u(t), t \in [0,1], \\ u(t) & \in & [-2,2]. \end{cases}$$



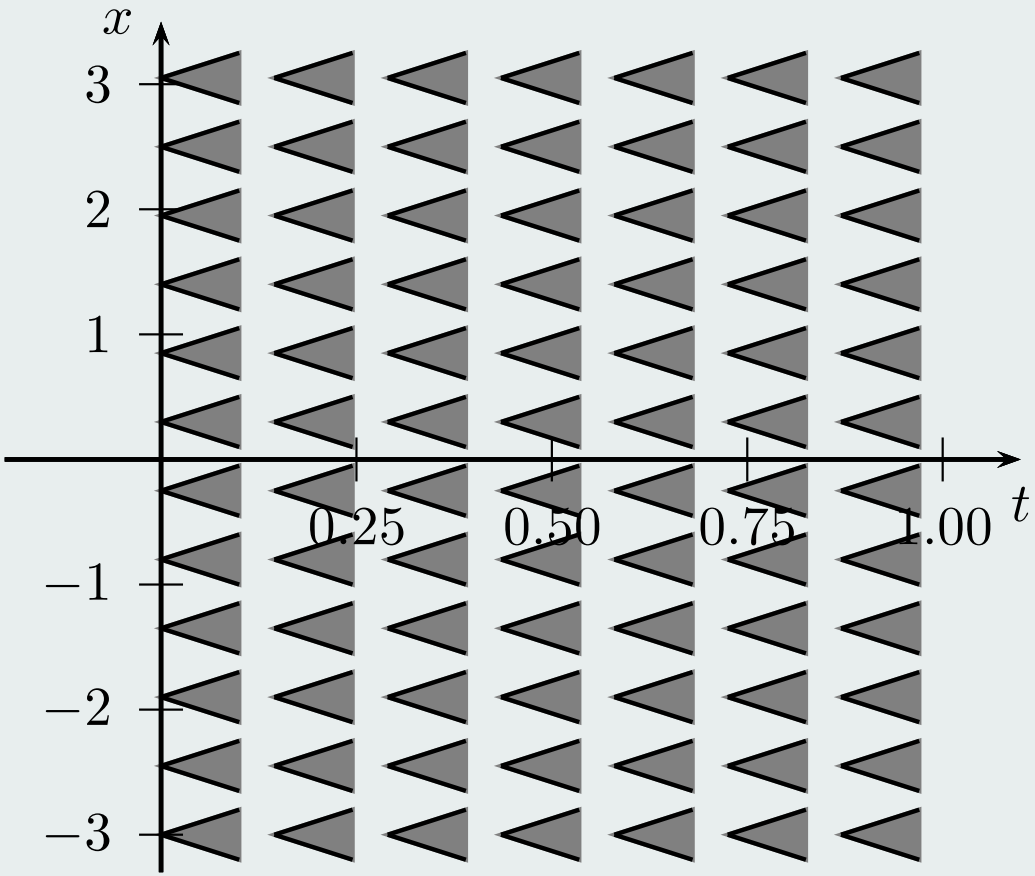
$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\in [-2,2]. \end{cases}$$



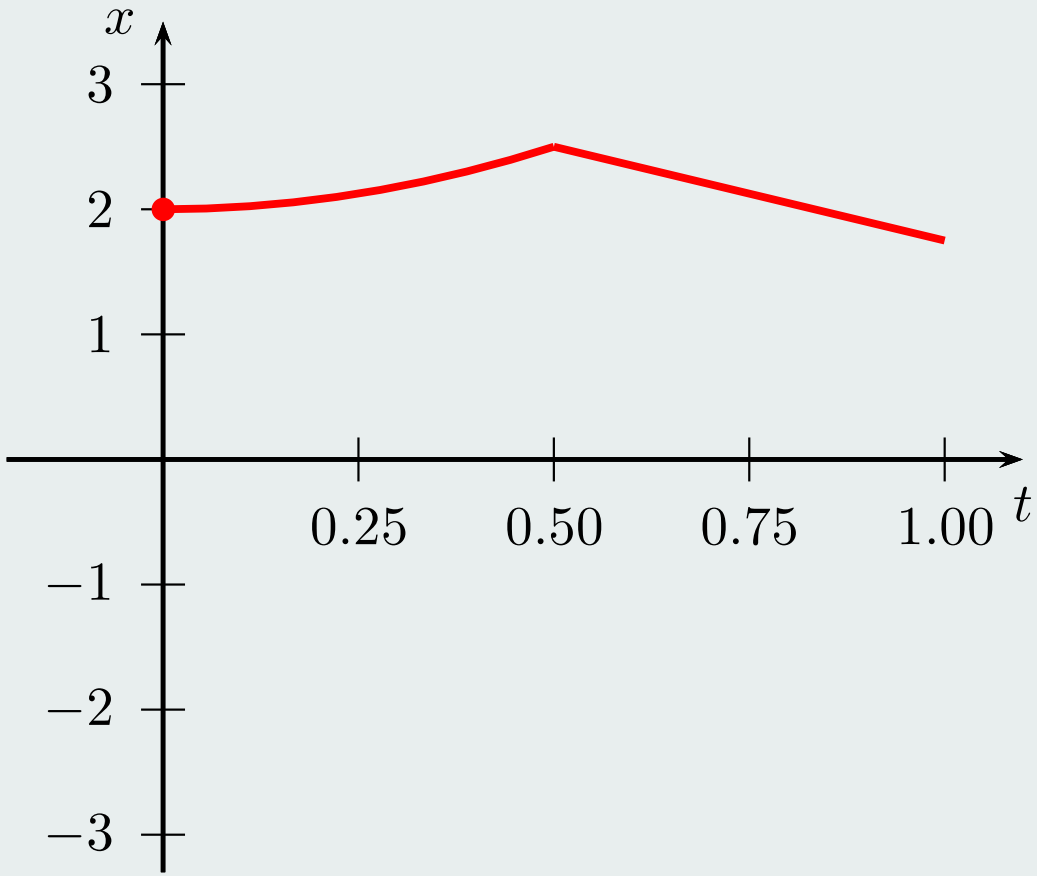
$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\in [-2,2]. \end{cases}$$



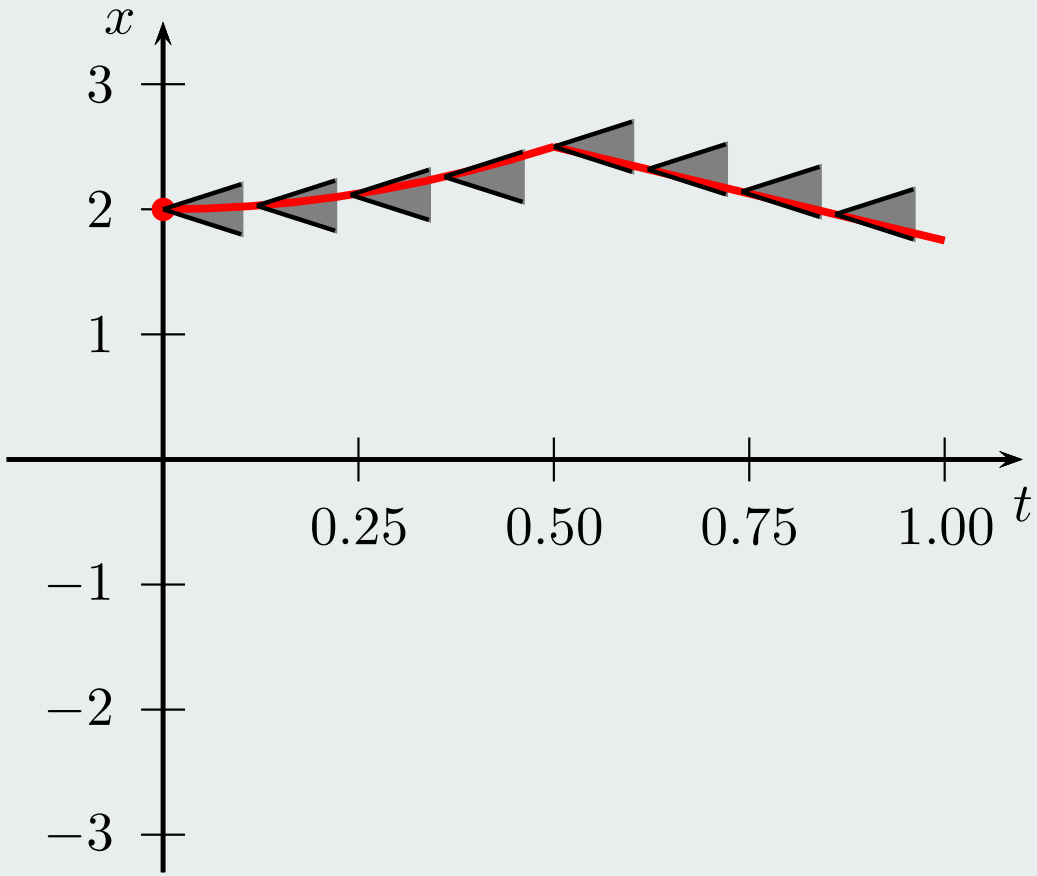
$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\in [-2,2]. \end{cases}$$



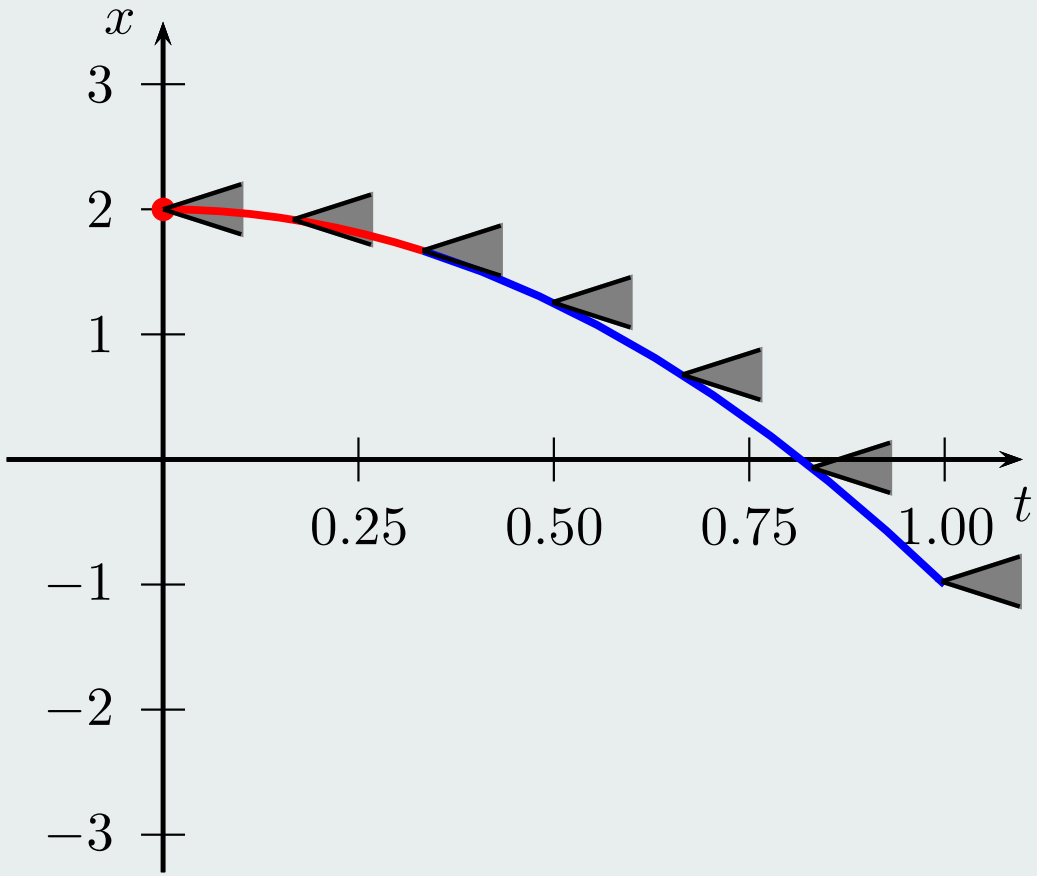
$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\in [-2,2]. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\in [-2,2]. \end{cases}$$



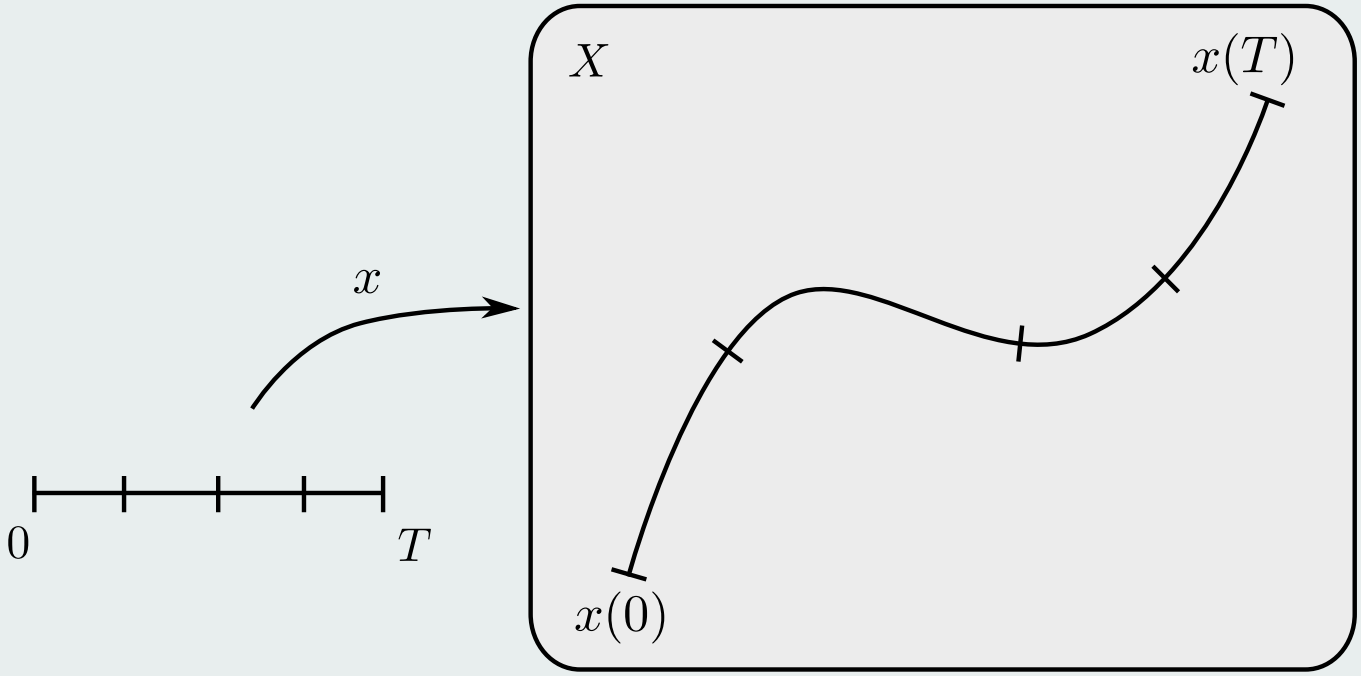
$$\begin{cases} x(0) &= 2 \\ \dot{x}(t) &= u(t), t \in [0,1], \\ u(t) &\notin [-2,2]. \end{cases}$$



Définition - Mesure d'occupation finale ν

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par ν la mesure

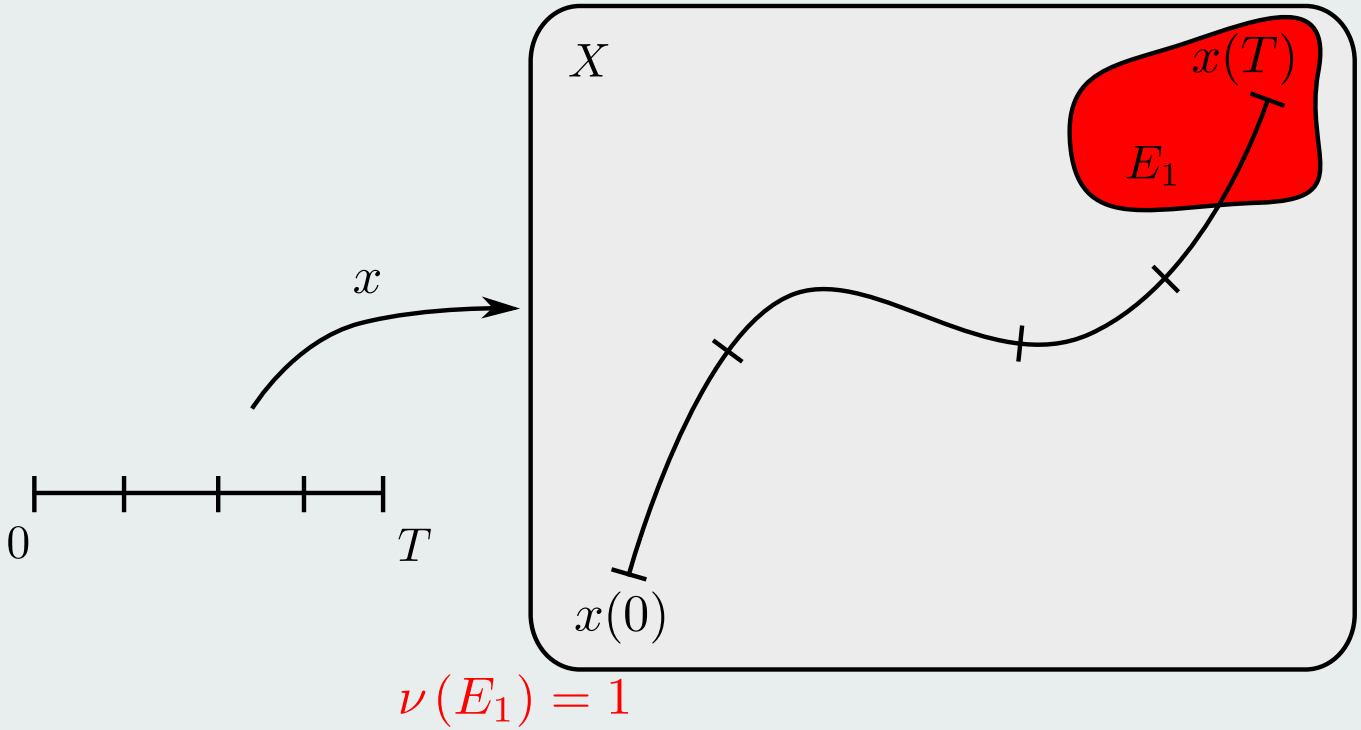
$$\nu(E) = \delta_{x(T)}(E)$$



Définition - Mesure d'occupation finale ν

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par ν la mesure

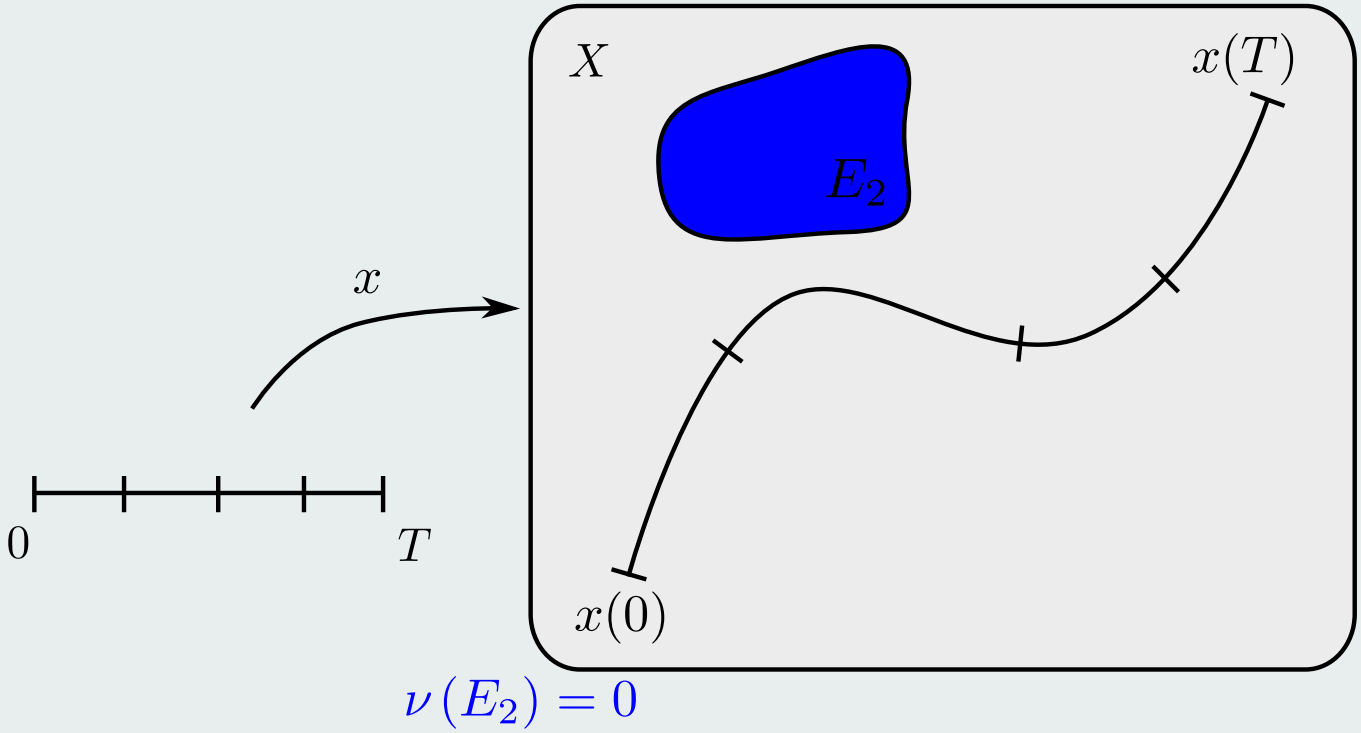
$$\nu(E) = \delta_{x(T)}(E)$$



Définition - Mesure d'occupation finale ν

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par ν la mesure

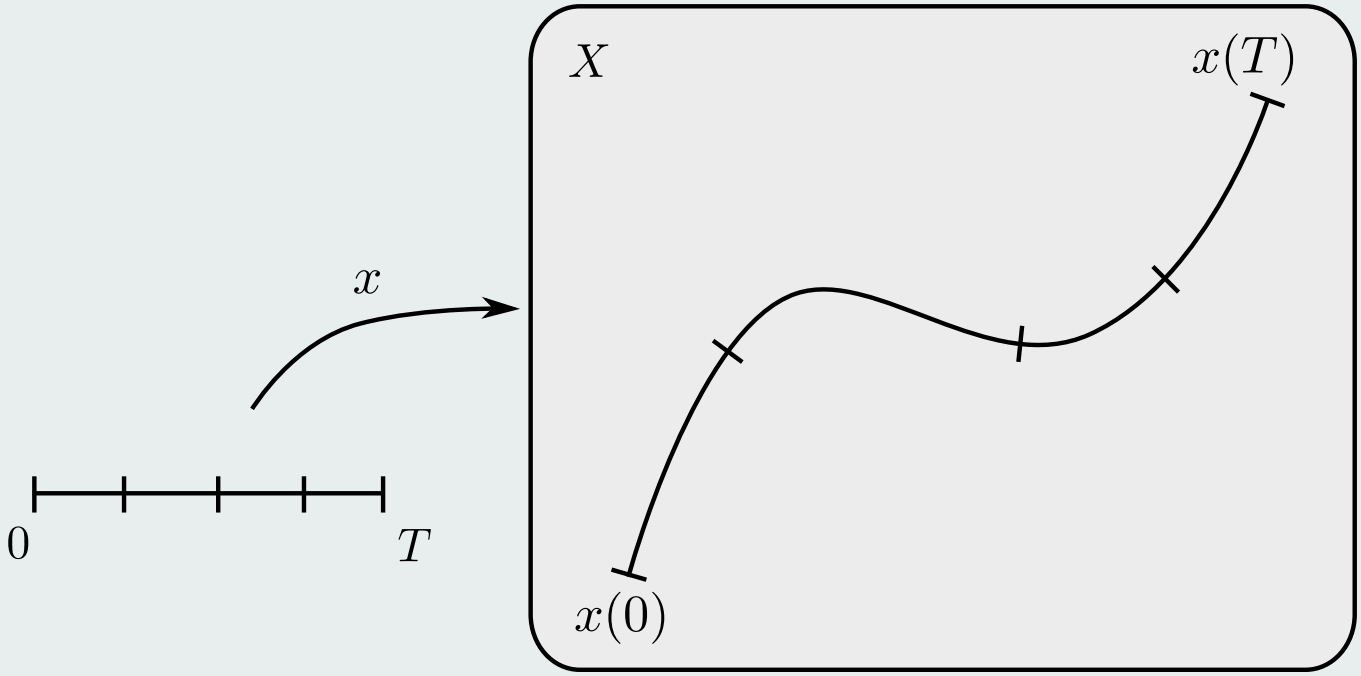
$$\nu(E) = \delta_{x(T)}(E)$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

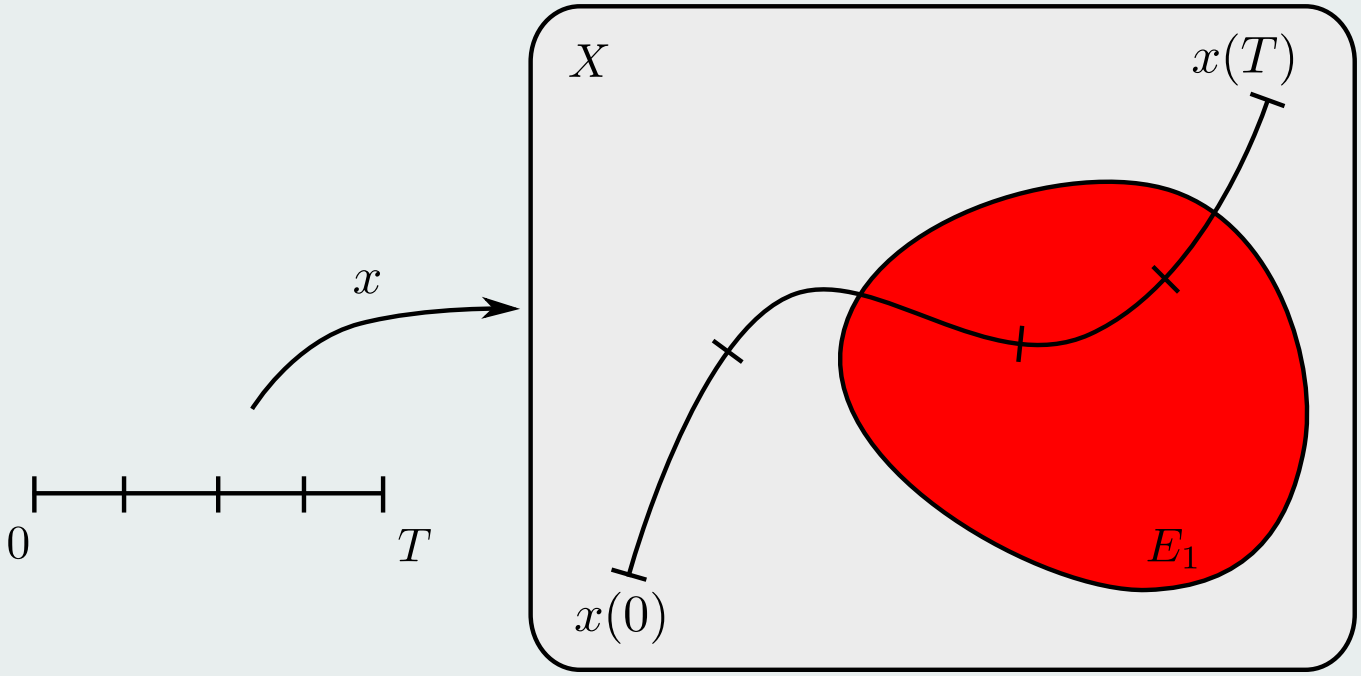
$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

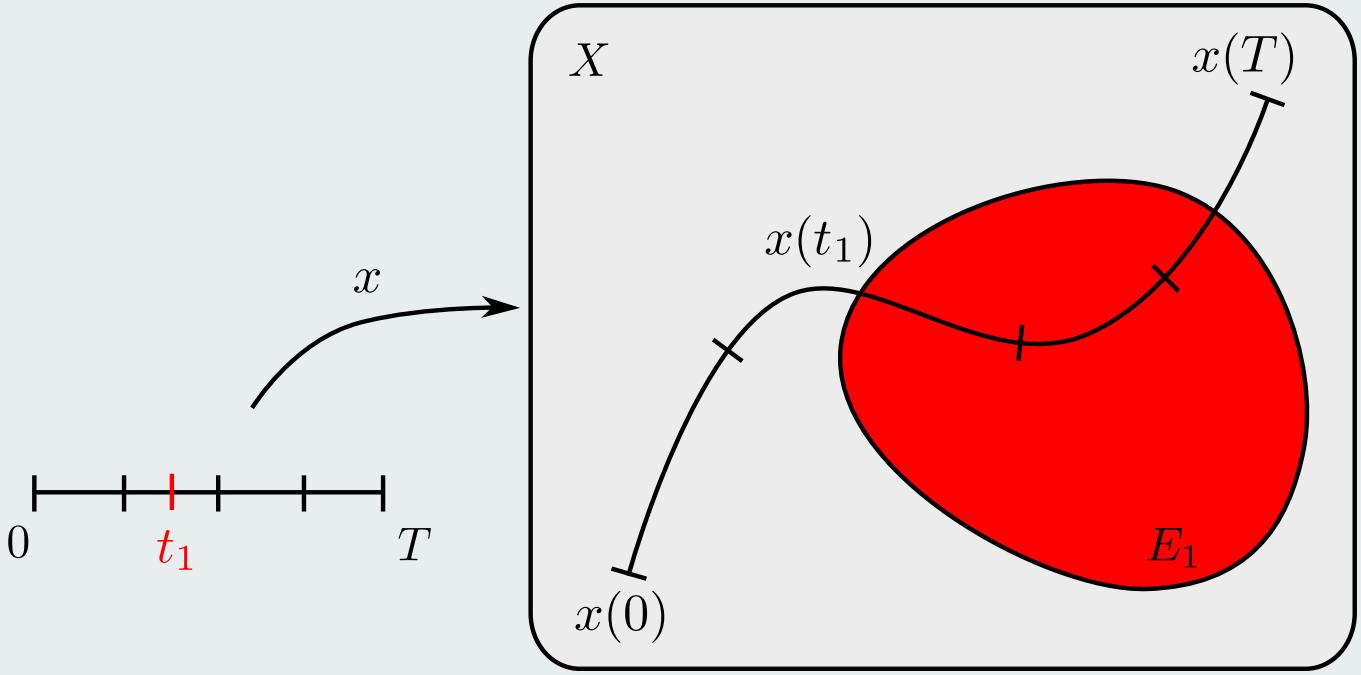
$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

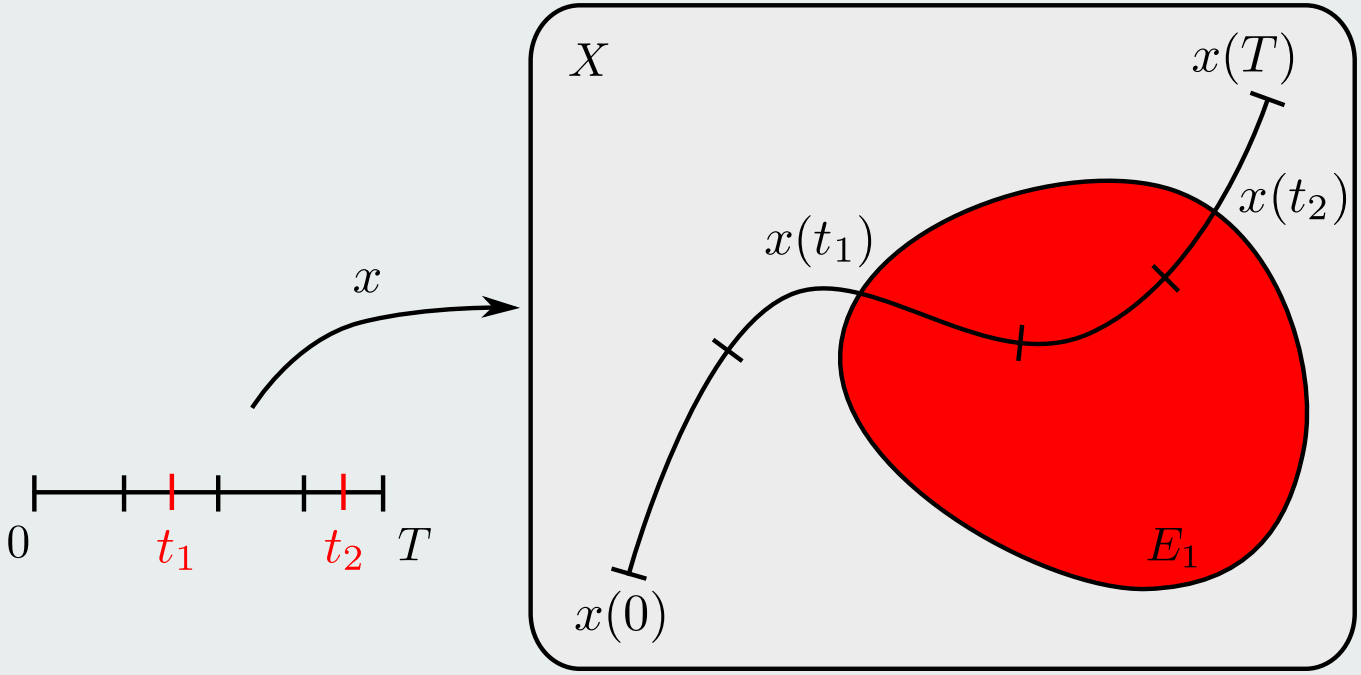
$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

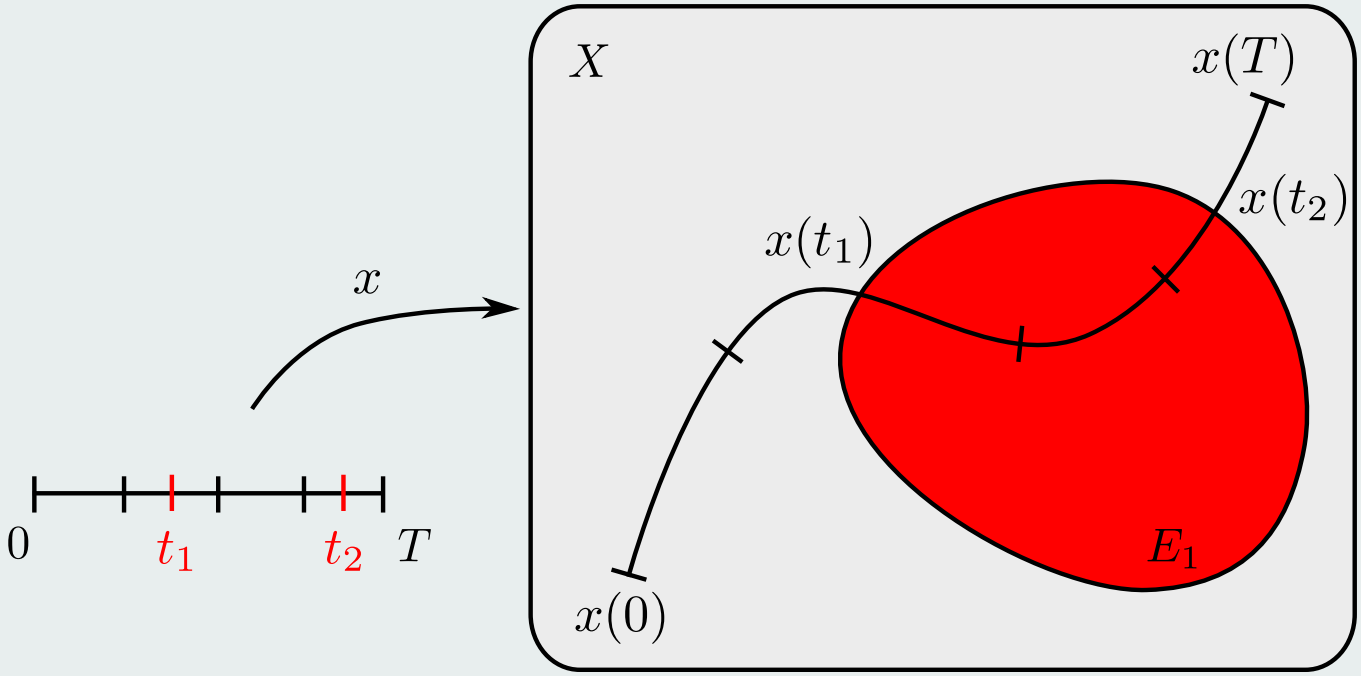
$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$

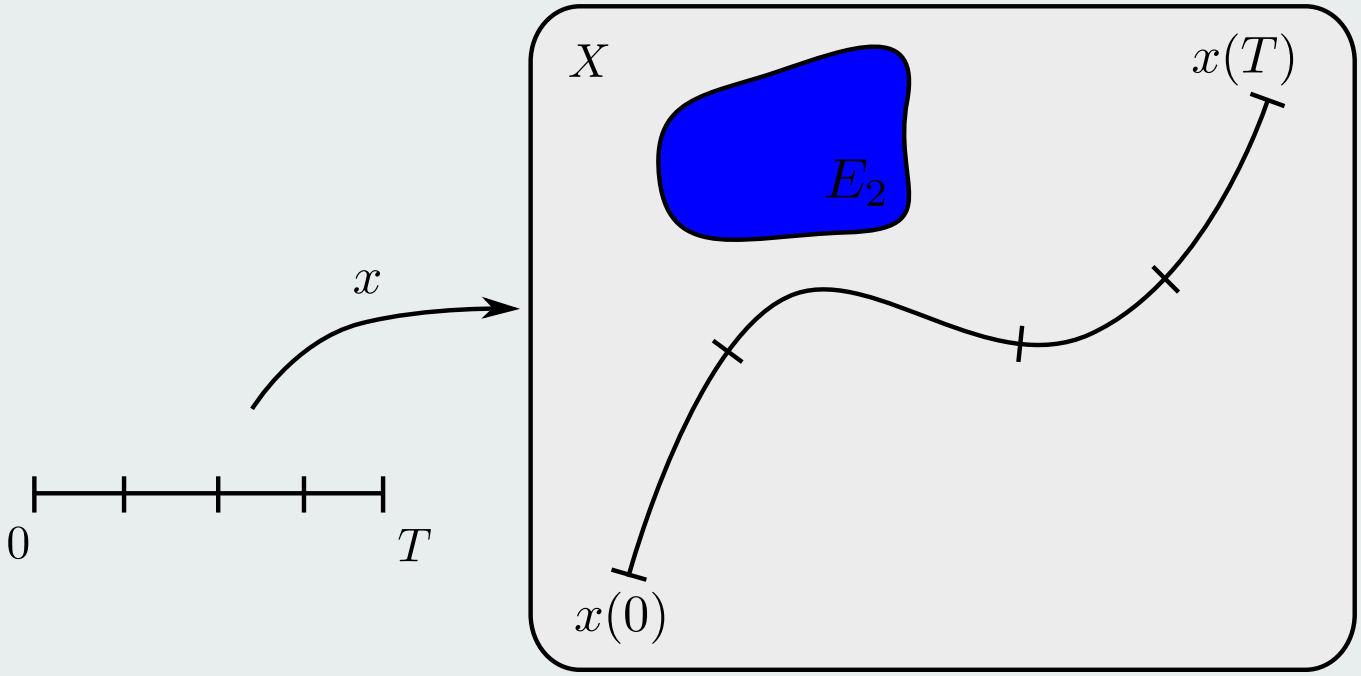


$\mu(E_1) = t_2 - t_1$

Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

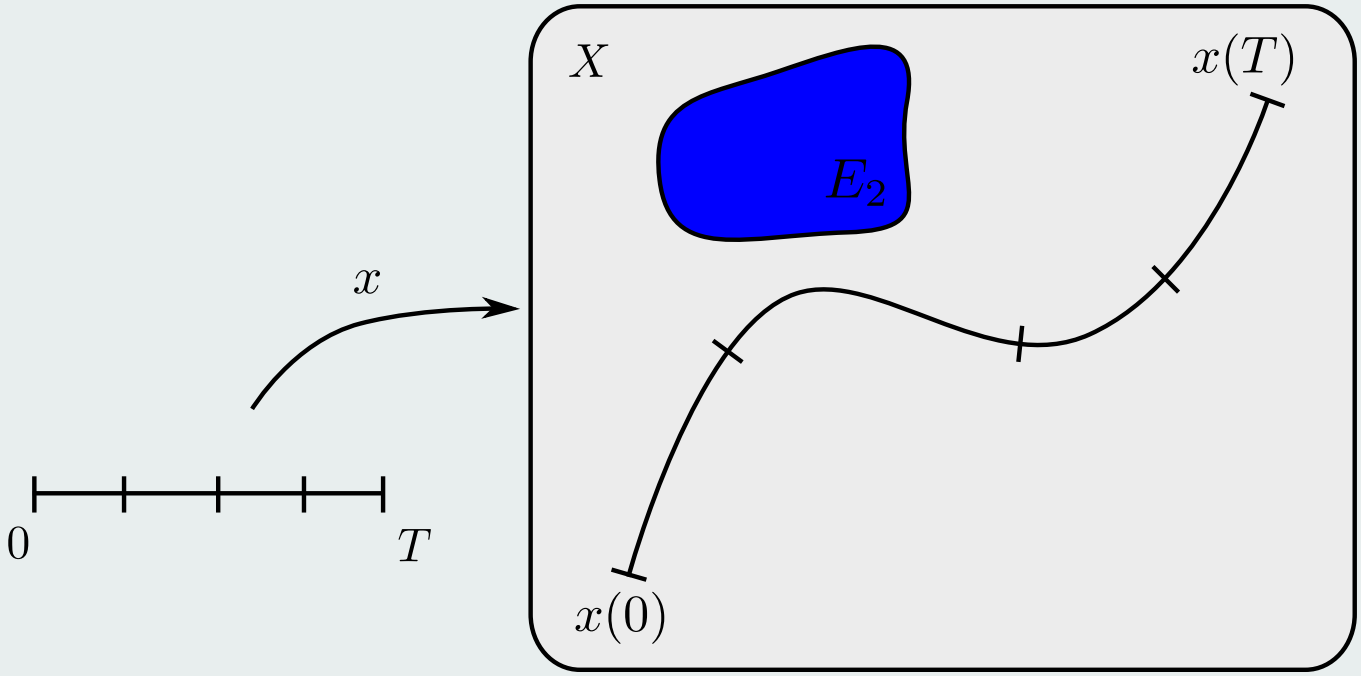
$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$



Définition - Mesure d'occupation μ

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée, on définit par μ la mesure

$$\mu(E) = \int_0^T 1_E(x(t))dt$$

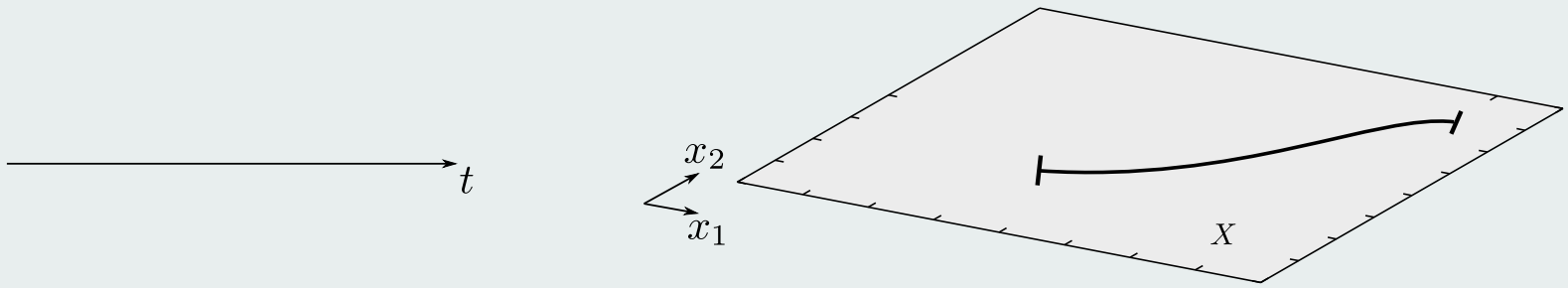


$\mu(E_2) = 0$

Proposition 1

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée et $h : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle alors

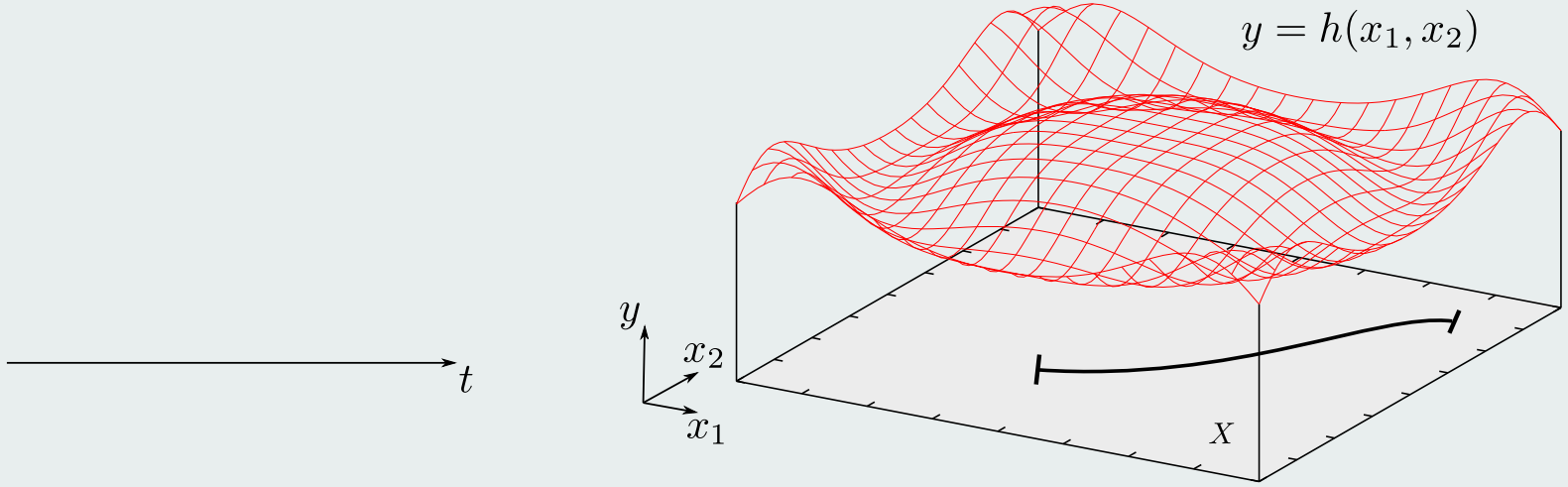
$$\int_0^T h(x(t))dt = \int_X h(x)d\mu.$$



Proposition 1

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée et $h : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle alors

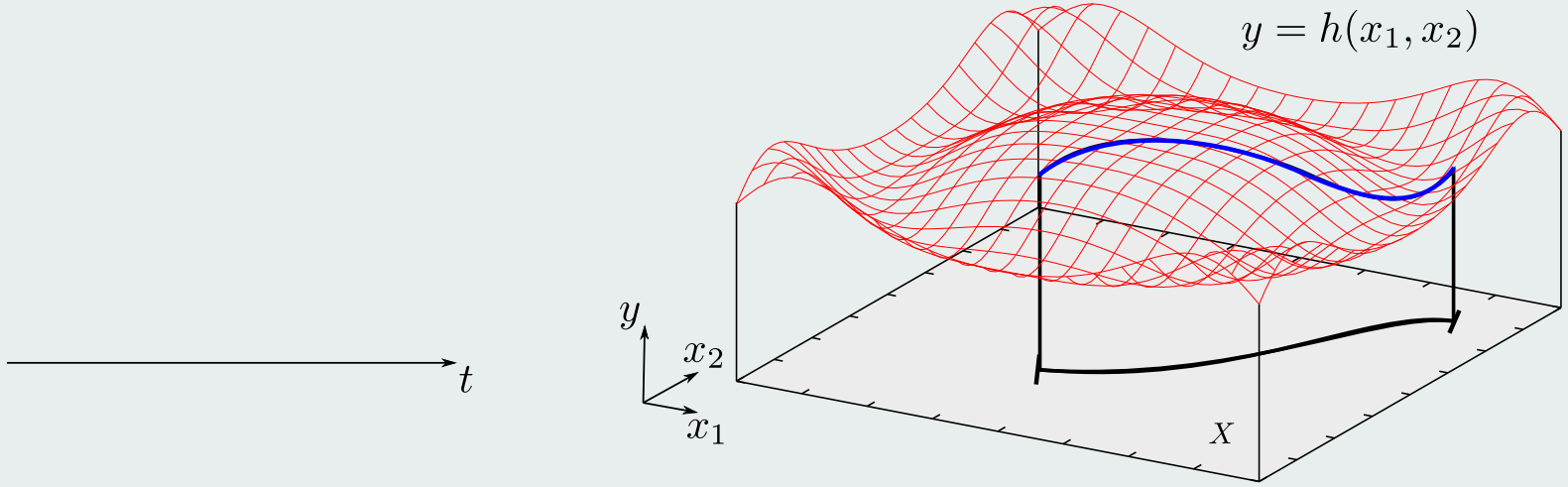
$$\int_0^T h(x(t))dt = \int_X h(x)d\mu.$$



Proposition 1

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée et $h : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle alors

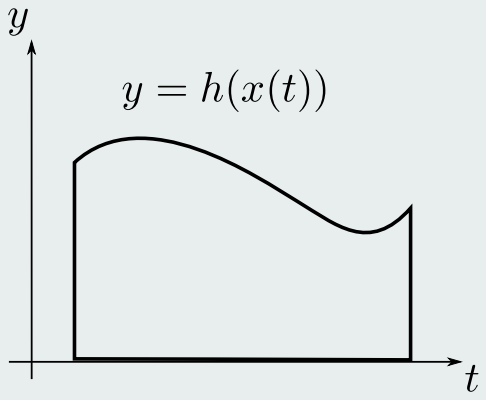
$$\int_0^T h(x(t))dt = \int_X h(x)d\mu.$$

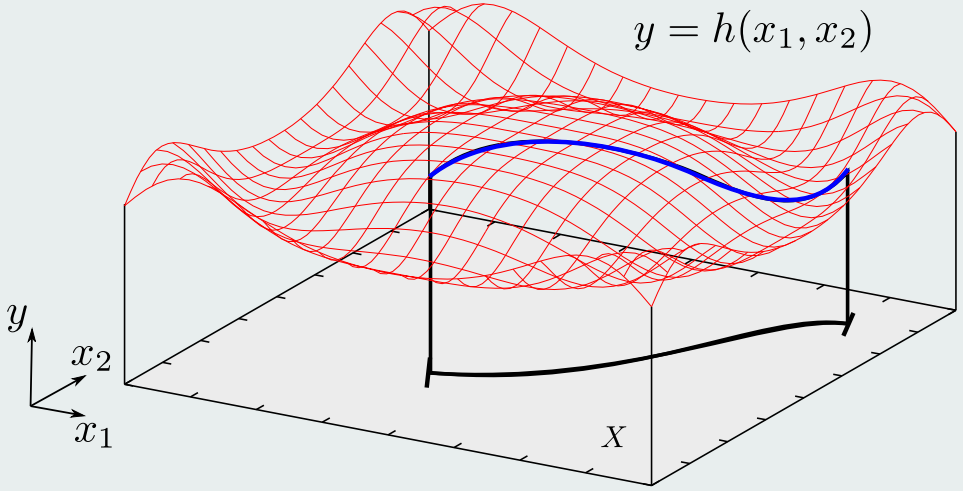


Proposition 1

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée et $h : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle alors

$$\int_0^T h(x(t))dt = \int_X h(x)d\mu.$$

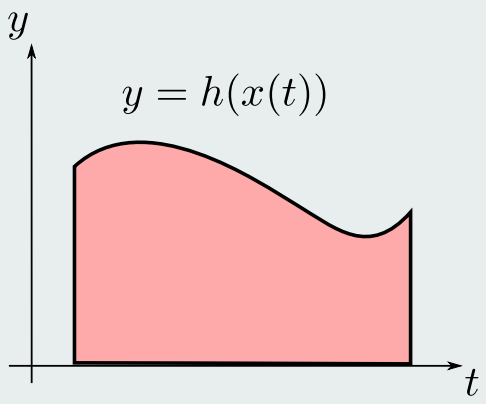


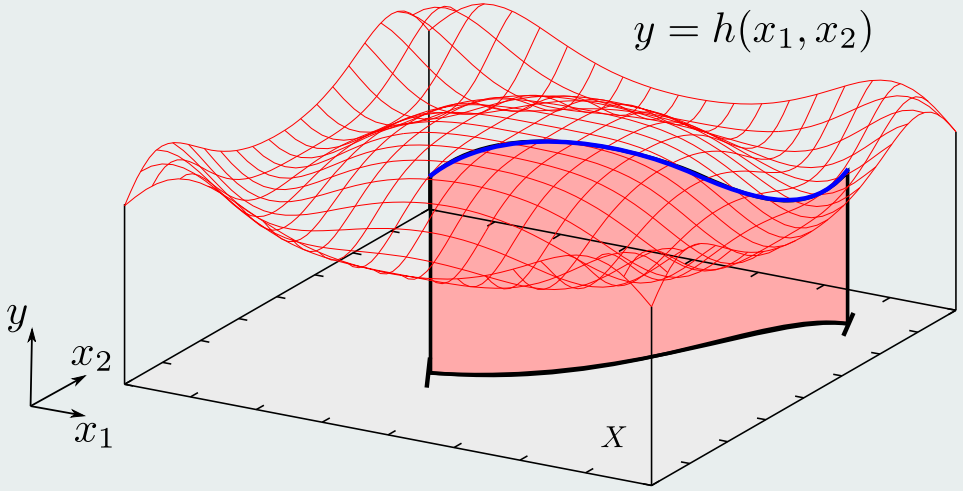


Proposition 1

Soit $x : [0, T] \mapsto X$ une courbe paramétrée et $h : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle alors

$$\int_0^T h(x(t))dt = \int_X h(x)d\mu.$$





Proposition

Considérons le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{11}$$

Soit $T > 0$, le couple (μ, ν) de mesures d'occupation associé à la solution de (11) vérifient l'équation linéaire :

$$\mathcal{L}'(\mu, \nu) = \delta_{x_0}. \tag{12}$$

avec

$$\begin{array}{rccccc} \mathcal{L}: & \mathcal{C}^\infty(X) & \to & \mathcal{C}^\infty(X) & \times & \mathcal{C}^\infty(X) \\ & \varphi & \mapsto & (-\nabla_x \varphi(\cdot) \cdot f(\cdot) & , & \varphi(\cdot)). \end{array}$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x \varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t)dt.$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t)dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot f(x(t))dt.$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t)dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot f(x(t))dt.$$

$$\int_X \varphi(x)d\nu - \int_X \varphi(x)d\delta_{x_0} = \int_X \nabla_x\varphi(x) \cdot f(x)d\mu$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t)dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot f(x(t))dt.$$

$$\int_X \varphi(x)d\nu - \int_X \varphi(x)d\delta_{x_0} = \int_X \nabla_x\varphi(x) \cdot f(x)d\mu$$

$$\langle \nu, \varphi \rangle - \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \mu, \nabla_x\varphi \cdot f \rangle$$

Proof

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t)dt.$$

$$\varphi(x(T)) - \varphi(x_0) = \int_0^T \nabla_x\varphi(x(t)) \cdot f(x(t))dt.$$

$$\int_X \varphi(x)d\nu - \int_X \varphi(x)d\delta_{x_0} = \int_X \nabla_x\varphi(x) \cdot f(x)d\mu$$

$$\langle \nu, \varphi \rangle - \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \mu, \nabla_x\varphi \cdot f \rangle$$

$$\langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

Proof

$$\langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle. \tag{13}$$

Proof

$$\langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle. \tag{13}$$

By duality, there exists a linear map $\mathcal{L}'$ such that

$$\langle \mathcal{L}'(\mu, \nu), \varphi \rangle = \langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle.$$

Proof

$$\langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle. \tag{13}$$

By duality, there exists a linear map $\mathcal{L}'$ such that

$$\langle \mathcal{L}'(\mu, \nu), \varphi \rangle = \langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle.$$

Therefore, (13) becomes :

$$\langle \mathcal{L}'(\mu, \nu), \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

Proof

$$\langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle. \tag{13}$$

By duality, there exists a linear map $\mathcal{L}'$ such that

$$\langle \mathcal{L}'(\mu, \nu), \varphi \rangle = \langle (\mu, \nu), \mathcal{L}\varphi \rangle.$$

Therefore, (13) becomes :

$$\langle \mathcal{L}'(\mu, \nu), \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

i.e.

$$\mathcal{L}'(\mu, \nu) = \delta_{x_0}.$$

Théorème

$$
\begin{aligned}
J_1^* = \min_{u:[0,T]\to U} & \int_0^T h(t,x(t),u(t))dt + H(x(T)) \\
\text{tel que } & x(0) = x_0, \dot{x} = f(x,u), \forall t \in [0,T], \\
& x(t) \in X, \forall t \in [0,T], x(T) \in K.
\end{aligned} \tag{14}
$$

et

$$
\begin{aligned}
J_2^* = \min_{\mu,\nu\in\mathcal{M}_+} & \langle \mu, h\rangle + \langle \nu, H\rangle \\
\text{tel que } & \mathcal{L}'(\mu,\nu) = \delta_{(0,x_0)}, \\
& supp(\mu) \subset [0,T]\times X\times U, supp(\nu)\subset K.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Sous les hypothèses de Vinter,

$$J_1^* = J_2^*.$$

R. Vinter. *Convex duality and nonlinear optimal control.* SIAM J. Control Optim. 31, 2 (1993), 518-538

Théorème

$$
\begin{aligned}
J_1^* = \min_{u:[0,T]\to U} & \int_0^T h(t,x(t),u(t))dt + H(x(T)) \\
\text{tel que } & x(0) = x_0, \dot{x} = f(x,u), \forall t \in [0,T], \\
& x(t) \in X, \forall t \in [0,T], x(T) \in K.
\end{aligned} \tag{14}
$$

et

$$
\begin{aligned}
J_2^* = \min_{\mu,\nu\in\mathcal{M}_+} & \langle \mu, h\rangle + \langle \nu, H\rangle \\
\text{tel que } & \mathcal{L}'(\mu,\nu) = \delta_{(0,x_0)}, \\
& supp(\mu) \subset [0,T]\times X\times U, supp(\nu)\subset K.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Sous les hypothèses de Vinter,

$$J_1^* = J_2^*.$$

R. Vinter. *Convex duality and nonlinear optimal control.* SIAM J. Control Optim. 31, 2 (1993), 518-538

Hiérarchie - Control optimal

$$J^* = \min_{\mu,\nu \in \mathcal{M}_+} \quad \langle \mu, h \rangle + \langle \nu, H \rangle$$

tel que $\quad \mathcal{L}'(\mu,\nu) = \delta_{(0,x_0)}$

$\{X_i\}$ une partition de $[0,T] \times X \times U$,
$\{Y_k\}$ une partition de K,
$\mathcal{P} = \{\varphi\}$ une famille finie de fonctions de t, x.

$$\underline{J} = \min_{\mu_i,\nu_k \in \mathbb{R}^+} \quad \sum_{i \in I} \mu_i \underline{h}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{H}_k$$

tel que $\forall \varphi \in \mathcal{P}$

$$\sum_{i \in I} \mu_i \underline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{\varphi}_k \leq \varphi(0,x_0)$$

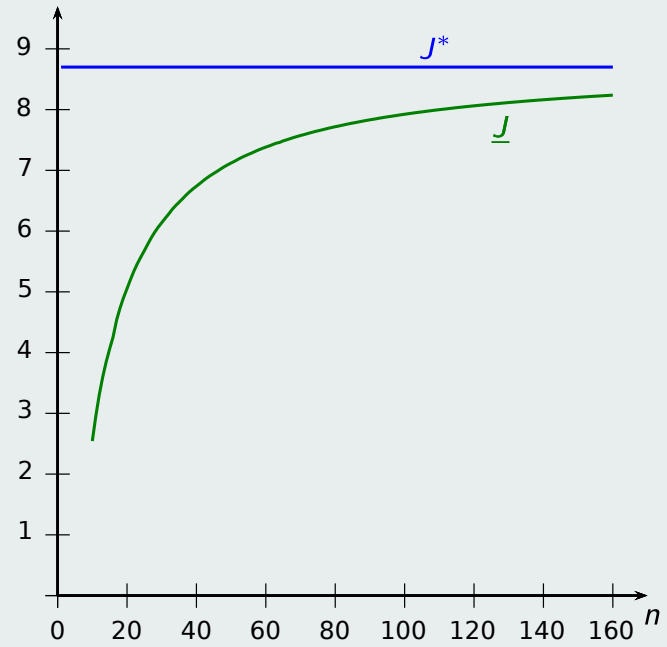
$$\varphi(0,x_0) \leq \sum_{i \in I} \mu_i \overline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \overline{\varphi}_k,$$

avec $\psi = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} f(t,x,u)$,

alors

$$\underline{J} \leq J^*.$$

Bornes inférieures garanties



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, and Sébastien Lagrange. Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis. *Computational Optimization and Applications, Springer Verlag*, volume 77, pages 307-334, 2020, 10.1007/s10589-020-00198-8

Conclusion

- Nous avons présenté un Positivstellensatz qui s'appuie sur l'algèbre tropicale.
- Le calcul par intervalles rend effectif ce théorème en construisant algorithmiquement les fonctions σ_j.
- Ce théorème permet d'avoir une relecture des techniques de résolution de problèmes non linéaires.

Perspectives

- Proposer une approche générale permettant de résoudre tous les problèmes généralisés des moments présentés dans : Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Conclusion

- Nous avons présenté un Positivstellensatz qui s'appuie sur l'algèbre tropicale.
- Le calcul par intervalles rend effectif ce théorème en construisant algorithmiquement les fonctions σ_j.
- Ce théorème permet d'avoir une relecture des techniques de résolution de problèmes non linéaires.

Perspectives

- Proposer une approche générale permettant de résoudre tous les problèmes généralisés des moments présentés dans : Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Merci pour votre attention.