Les reformulations quadratiques convexes : théorie et application à l'OPF

Amélie Lambert

Montpellier, 26 octobre 2022

Conservatoire National des arts et Métiers - Cédric

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

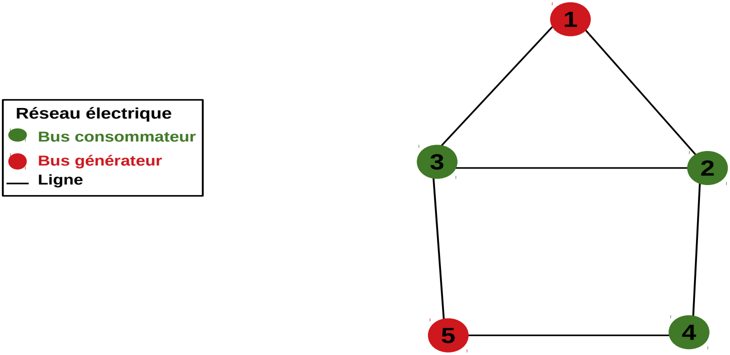
Un peu de littérature

La méthode `Compact OPF` (`COPF`)

Quelques résultats expérimentaux

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)



Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données

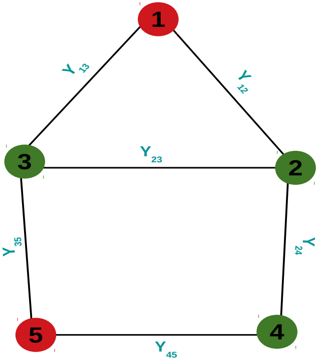
$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: admittance de la ligne (j,k)

Réseau électrique

Bus consommateur

Bus générateur

Ligne



Matrice d'admittance $Y = \underbrace{G}_{\textbf{conductance}} + \mathbf{i} \underbrace{B}_{\textbf{susceptance}}$

$\rightarrow$ pour chaque ligne.

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

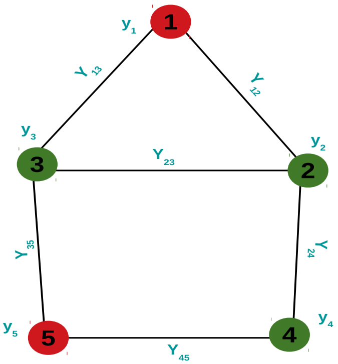
Données

$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: admittance de la ligne (j,k)

$y_k = g_k + ib_k$: admittance au bus k

Réseau électrique

- Bus consommateur
- Bus générateur
- Ligne



Vecteur d'admittance $y = \underbrace{g}_{\textbf{conductance}} + \mathbf{i} \underbrace{b}_{\textbf{susceptance}}$

$\rightarrow$ pour chaque bus.

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données

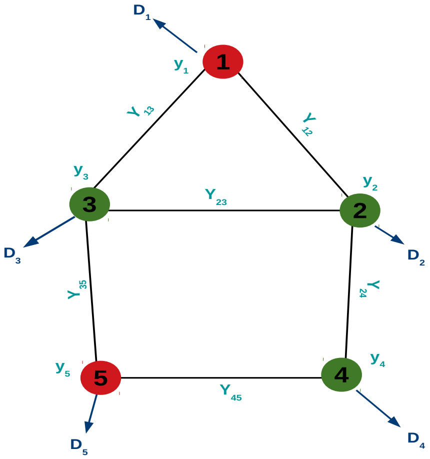
$Y_{jk} = G_{jk} + \mathrm{i}B_{jk}$: admittance de la ligne (j,k)

$y_k = g_k + \mathrm{i}b_k$: admittance au bus k

$D_k = p^l_k + \mathrm{i}q^l_k$: demande au bus k

Réseau électrique

- Bus consommateur
- Bus générateur
- Ligne



Vecteur des demandes $D = \underbrace{p^l}_{\textbf{demande active}} + \mathbf{i} \underbrace{q^l}_{\textbf{demande réactive}}$

$\rightarrow$ puissance attendue à chaque bus.

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données

$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: **admittance de la ligne** (j,k)

$y_k = g_k + ib_k$: **admittance au bus** k

$D_k = p^l_k + iq^l_k$: **demande au bus** k

Réseau électrique

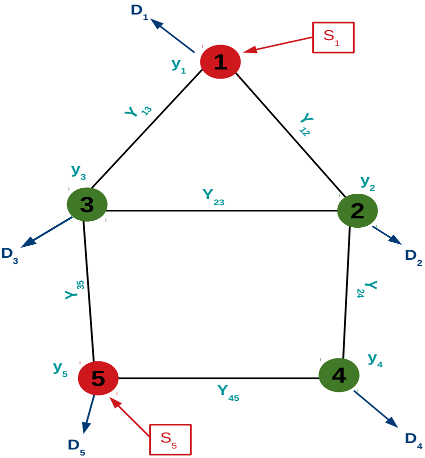
Bus consommateur

Bus générateur

Ligne

Variables

$S_k = p_k + iq_k$: **puissance au bus** k



Vecteur des puissances générées à chaque bus générateur

$$S = \underbrace{p}_{\text{puissance active}} + \mathrm{i} \underbrace{q}_{\text{puissance réactive}}$$

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données

$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: **admittance de la ligne** (j,k)

$y_k = g_k + ib_k$: **admittance au bus** k

$D_k = p^l_k + iq^l_k$: **demande au bus** k

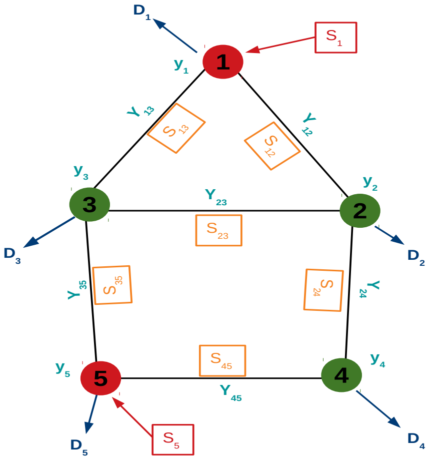
Réseau électrique

- **Bus consommateur**
- **Bus générateur**
- **Ligne**

Variables

$S_k = p_k + iq_k$: **puissance au bus** k

$S_{jk} = s^r_{jk} + is^c_{jk}$: **puissance de la ligne** (j,k)



Matrice des puissances sur les lignes

$$S = \underbrace{s^r}_{\text{puissance active}} + i \underbrace{s^c}_{\text{puissance réactive}}$$

Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données

$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: admittance de la ligne (j,k)

$y_k = g_k + ib_k$: admittance au bus k

$D_k = p^l_k + iq^l_k$: demande au bus k

Réseau électrique

Bus consommateur

Bus générateur

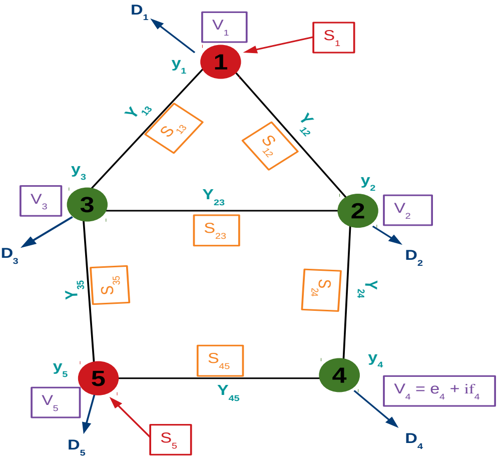
Ligne

Variables

$S_k = p_k + iq_k$: puissance au bus k

$S_{jk} = s^r_{jk} + is^c_{jk}$: puissance de la ligne (j,k)

$V_k = e_k + jf_k$: tension au bus k



Vecteur des tensions $V = e + if$.

$\rightarrow$ tension déterminée pour chaque bus.

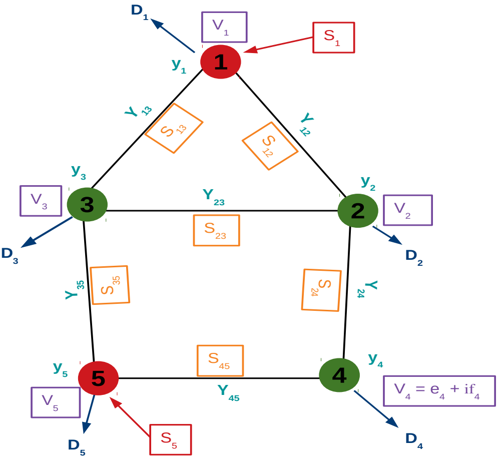
Le problème d'optimisation des flux de puissance (OPF)

Données
$Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}$: admittance de la ligne (j,k)
$y_k = g_k + ib_k$: admittance au bus k
$D_k = p^l_k + iq^l_k$: demande au bus k

Réseau électrique
Bus consommateur
Bus générateur
Ligne

Variables
$S_k = p_k + iq_k$: puissance au bus k
$S_{jk} = s^r_{jk} + is^c_{jk}$: puissance de la ligne (j,k)
$V_k = e_k + jf_k$: tension au bus k

Objectif :
minimiser les coûts de production C



But

Déterminer les puissances et les tensions qui respectent la conservation des flux en satisfaisant la demande et minimisant les coûts de production C.

Une formulation QCQP [Torres and al. 98]

L'OPF s'écrit naturellement en variables complexes

$\rightarrow$ Introduction de variables réelles dont la dimension est doublée :

$$
\begin{cases}
x = (\underbrace{e}_{\text{partie réelle}}, \underbrace{f}_{\text{partie imag.}}) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ tensions aux bus} \\
y = (\underbrace{p}_{\text{partie réelle}}, \underbrace{q}_{\text{partie imag.}}) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ puissances aux bus générateurs} \\
s = (\underbrace{s^r}_{\text{partie réelle}}, \underbrace{s^c}_{\text{partie imag.}}) \in \mathbb{R}^{2m} \text{ puissances sur les lignes}
\end{cases}
$$

Une formulation QCQP

Conservation des flux à chaque bus k :

Puissance réelle :

$$\underbrace{\mathbf{g}_k(e_k^2 + f_k^2) + \sum_{j\in\delta(k)} s_{kj}^r}_{\text{puissance arrivant au bus k}} + \underbrace{p_k}_{\substack{\text{puissance générée au bus k} \\ =0 \text{ si bus non générateur}}} = \underbrace{p_k^l}_{\text{demande au bus k}}$$

Puissance imaginaire :

$$\mathbf{b}_k(e_k^2 + f_k^2) + \sum_{j\in\delta(k)} s_{kj}^c + q_k = q_k^l$$

$\rightarrow$ linéaires en $s = (s^r, s^c)$ et $y = (p, q)$, séparables en $x = (e, f)$.

Une formulation QCQP

Définition de la puissance sur chaque ligne (k, j)

Puissance réelle :

$$s^r_{kj} = -\mathbf{G}_{kj}(e_k^2 + f_k^2) + \mathbf{G}_{kj}(e_k e_j + f_k f_j) - \mathbf{B}_{kj}(e_k f_j - e_j f_k)$$

Puissance imaginaire :

$$s^c_{kj} = \mathbf{B}_{kj}(e_k^2 + f_k^2) - \mathbf{B}_{kj}(e_k e_j + f_k f_j) - \mathbf{G}_{kj}(e_k f_j - e_j f_k)$$

$\rightarrow$ linéaires en $s = (s^r, s^c)$ et quadratiques en $x = (e, f)$.

Une formulation QCQP

Modules des tensions à chaque bus k

$$\underline{\mathbf{v}}_k \leq e_k^2 + f_k^2 \leq \overline{\mathbf{v}}_k$$

$\rightarrow$ séparables en $x = (e, f)$, une des inégalités est convexe.

Limites thermiques sur chaque ligne (k, j)

$$(s_{kj}^r)^2 + (s_{kj}^c)^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_{kj}$$

$\rightarrow$ séparables et convexes en $s = (s^r, s^c)$

Une formulation QCQP

Bornes sur les puissances à chaque bus k

Puissance réelle :

$$\underline{\mathbf{p}}_k \leq p_k \leq \overline{\mathbf{p}}_k$$

Puissance imaginaire :

$$\underline{\mathbf{q}}_k \leq q_k \leq \overline{\mathbf{q}}_k$$

$\rightarrow$ linéaire en $y = (p, q)$

Fonction Objectif :

$$\min h(y) = \sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathsf{C}_k y_k^2 + \mathsf{c}_k y_k \right)$$

$\rightarrow$ quadratique convexe en $y = (p, q)$

Une formulation QCQP

$$
(OPF)\left\{
\begin{array}{l}
\min \boxed{h(y) = \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathsf{C}_k y_k^2 + \mathsf{c}_k y_k \right)} \rightarrow \text{coûts de production} \\
\text{s.t.} \\
\quad \boxed{b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k} \rightarrow \text{Conservation des flux} \\
\quad \boxed{\langle A_l, xx^T \rangle = s_l} \rightarrow \text{Définition des puissances} \\
\quad \boxed{\underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k} \rightarrow \text{Modules de tensions} \\
\quad \boxed{s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathsf{S}}_l} \rightarrow \text{Limites thermiques} \\
\quad \boxed{\underline{p} \leq y \leq \overline{p}} \rightarrow \text{Bornes des puissances} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{array}
\right.
$$

Un peu de littérature

Résolution exacte de (OPF)

(OPF) est un problème $\mathcal{NP}$-difficile.

En pratique : difficile de prouver l'optimalité globale
$\rightarrow$ même pour des instances avec $n = 300$ (réseaux réels $n > 1000$).

Pourtant

- Algorithmes efficaces qui fournissent des solutions réalisables :
  $\rightarrow$ Méthodes de points intérieurs, approximations linéaires...

- Approches pour calculer des bornes inférieures serrées :
  $\rightarrow$ Basée sur la programmation semi-définie : Relaxation du rang

Construction de la relaxation du rang

$$
\begin{cases}
\min \sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k \right) \\
\text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\
\quad s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \; y \in \mathbb{R}^{2n}, \; s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Construction de la relaxation du rang

$$\left\{\begin{array}{l}
\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\
\text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\
\quad s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{l}
\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k Y_{kk} + \mathbf{c}_k y_k\right) \\
\text{s.t. } a_k^x (X_{kk} + X_{k+n,k+n}) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, X \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \leq X_{kk} + X_{k+n,k+n} \leq \overline{v}_k \\
\quad S_{ll} + S_{l+m,l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\quad X = xx^\top,\ Y = yy^\top,\ S = ss^\top \\
\quad y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \\
\quad (X, Y, S) \in (\mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2m})
\end{array}\right.$$

- Introduction des matrices variables $X = xx^\top$, $Y = yy^\top$ et $S = ss^\top$
  $\rightarrow$ linéarisation de l'objectif et des contraintes ;

Construction de la relaxation du rang

$$\left\{\begin{array}{l}\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\ \text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \quad \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\ \quad \underline{v}_k \le x_k^2 + x_{k+n}^2 \le \overline{v}_k \\ \quad s_l^2 + s_{l+m}^2 \le \overline{\mathbf{S}}_l \\ \quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}\end{array}\right. \xrightarrow{relax} (SDP) \left\{\begin{array}{l}\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k Y_{kk} + \mathbf{c}_k y_k\right) \\ \text{s.t. } a_k^x(X_{kk} + X_{k+n,k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \quad \langle A_l, X \rangle = s_l \\ \quad \underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k \\ \quad S_{ll} + S_{l+m,l+m} \le \overline{\mathbf{S}}_l \\ \quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\ \quad X = xx^\top,\ Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0 \\ \quad y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \\ \quad (X, Y, S) \in (\mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2m})\end{array}\right.$$

- Introduction des matrices variables $X = xx^\top$, $Y = yy^\top$ et $S = ss^\top$
  $\rightarrow$ linéarisation de l'objectif et des contraintes ;
- Relaxation des contraintes $Y = yy^\top$ et $S = ss^\top$:
  $\rightarrow Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0$

Construction de la relaxation du rang

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\min \sum\limits_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k \right) \\
\text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \le x_k^2 + x_{k+n}^2 \le \overline{v}_k \\
\quad s_l^2 + s_{l+m}^2 \le \overline{\mathbf{S}}_l \\
\quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{array}
\right.
\xrightarrow{relax} (SDP)
\left\{
\begin{array}{l}
\min \sum\limits_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k Y_{kk} + \mathbf{c}_k y_k \right) \\
\text{s.t. } a_k^x (X_{kk} + X_{k+n,k+n}) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, X \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k \\
\quad S_{ll} + S_{l+m,l+m} \le \overline{\mathbf{S}}_l \\
\quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
\quad X \succeq 0,\ Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0 \\
\quad y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \\
\quad (X, Y, S) \in (\mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2m})
\end{array}
\right.
$$

- Introduction des matrices variables $X = xx^\top$, $Y = yy^\top$ et $S = ss^\top$
  $\rightarrow$ linéarisation de l'objectif et des contraintes ;
- Relaxation des contraintes $Y = yy^\top$ et $S = ss^\top$:
  $\rightarrow Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0$
- $X = xx^\top \iff X \succeq 0$ et $\mathrm{rang}(X) = 1$:
  $\rightarrow$ on relâche $\mathrm{rang}(X) = 1$

Branch-and-bound spatial basé sur la valeur (SDP) ?

- Comme les bornes sur les x et s n'apparaissent pas dans (SDP)
  $\Rightarrow$ On ne peut pas resserrer les intervalles des variables.

Branch-and-bound spatial basé sur la valeur (SDP) ?

- Comme les bornes sur les x et s n'apparaissent pas dans (SDP)
  $\Rightarrow$ On ne peut pas resserrer les intervalles des variables.
- Inclure des méthode de Bound-Tightening
  $\Rightarrow$ Méthode `SDP-BT` [Gopinath and al. 2020]

Branch-and-bound spatial basé sur la valeur (SDP) ?

- Comme les bornes sur les x et s n'apparaissent pas dans (SDP)
  $\Rightarrow$ On ne peut pas resserrer les intervalles des variables.
- Inclure des méthode de Bound-Tightening
  $\Rightarrow$ Méthode `SDP-BT` [Gopinath and al. 2020]

Notre approche : Construire des relaxations quadratiques convexes atteignant la valeur de (SDP) :

- La méthode `RC-OPF` [Godard and al. 2019]
  $\rightarrow$ relaxation en un QP (cont. linéaires) : $\mathcal{O}((n+m)^2)$

Branch-and-bound spatial basé sur la valeur (SDP) ?

- Comme les bornes sur les x et s n'apparaissent pas dans (SDP)
  $\Rightarrow$ On ne peut pas resserrer les intervalles des variables.
- Inclure des méthode de Bound-Tightening
  $\Rightarrow$ Méthode `SDP-BT` [Gopinath and al. 2020]

Notre approche : Construire des relaxations quadratiques convexes atteignant la valeur de (SDP) :

- La méthode `RC-OPF` [Godard and al. 2019]
  $\rightarrow$ relaxation en un QP (cont. linéaires) : $\mathcal{O}((n+m)^2)$
- La méthode `COPF`
  $\rightarrow$ relaxation en un QCQP (cont. quadratiques) : $(\mathcal{O}(n+m)$

La méthode Reformulation Convexe OPF (RC-COPF)

La méthode RC-OPF [Godard and al. 2019]

Elle s'applique à une variante de l'OPF

$\rightarrow$ pas de limites thermiques sur les lignes :

$$
(OPF) \begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k \right) \\
\text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\quad \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\
\quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\
\quad \boxed{s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l} \\
\quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \; y \in \mathbb{R}^{2n}, \; s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

- Dans cette variante, on supprime les contraintes de limites thermiques.

La méthode RC-OPF [Godard and al. 2019]

Elle s'applique à une variante de l'OPF

$\rightarrow$ pas de limites thermiques sur les lignes :

$$(OPF)\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\ \text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \quad \boxed{\langle A_l, xx^T\rangle = s_l} \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \boxed{s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l} \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases}$$

- Dans cette variante, on supprime les contraintes de limites thermiques.
- Avec la définition des puissances sur les lignes, on réécrit les contraintes de conservation des flux en fonction des variables x.

La méthode RC-OPF [Godard and al. 2019]

Elle s'applique à une variante de l'OPF

$\rightarrow$ pas de limites thermiques sur les lignes :

$$(OPF)\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\ \text{s.t. } b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) = D_k \\ \quad \boxed{\langle A_l, xx^T \rangle = s_l} \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \boxed{s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l} \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \ y \in \mathbb{R}^{2n}, \ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases} \Rightarrow (OPF')\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T \rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

- Dans cette variante, on supprime les contraintes de limites thermiques.
- Avec la définition des puissances sur les lignes, on réécrit les contraintes de conservation des flux en fonction des variables x.
- On peut supprimer les variables s.

Construction d'une famille de relax. quadratiques convexes

$$(OPF')\begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T\rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

Construction d'une famille de relax. quadratiques convexes

$$(OPF') \begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T \rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases} \iff (OPF') \begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, X \rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq X_{kk} + X_{k+n,k+n} \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad X = xx^\top \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ X \in \mathbf{S}_{2n} \end{cases}$$

- Introduction de $(2n)^2$ variables X qui représentent les produits $xx^\top$.
  $\rightarrow$ linéarisation des contraintes

Construction d'une famille de relax. quadratiques convexes

$$(OPF') \begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T \rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases} \Longleftrightarrow (OPF'_M) \begin{cases} \min h(y) + \langle M, xx^\top - X \rangle \\ \text{s.t. } \langle A_k, X \rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq X_{kk} + X_{k+n,k+n} \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad X = xx^\top \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ X \in \mathbf{S}_{2n} \end{cases}$$

- Introduction de $(2n)^2$ variables X qui représentent les produits $xx^\top$.
  $\rightarrow$ linéarisation des contraintes
- Soient une matrice SDP $M \in \mathbf{S}_{2n}^+$, et

$$h_M(y, x, X) = h(y) + \langle M, xx^\top - X \rangle = h(y) \text{ si } X = xx^\top$$

Construction d'une famille de relax. quadratiques convexes

$$(OPF') \begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T\rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases} \xrightarrow{relax} (OPF'_M) \begin{cases} \min h(y) + \langle M, xx^\top - X\rangle \\ \text{s.t. } \langle A_k, X\rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \leq X_{kk} + X_{k+n,k+n} \leq \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \quad X_{ij} \leq u_i x_j + \ell_j x_i - u_i \ell_j \\ \quad X_{ij} \leq \ell_i x_j + u_j x_i - \ell_i u_j \\ \quad X_{ij} \geq u_i x_j + u_j x_i - u_i u_j \\ \quad X_{ij} \geq \ell_i x_j + \ell_j x_i - \ell_i \ell_j \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ X \in \mathbf{S}_{2n} \end{cases}$$

- Introduction de $(2n)^2$ variables X qui représentent les produits $xx^\top$.
  $\rightarrow$ linéarisation des contraintes
- Soient une matrice SDP $M \in \mathbf{S}_{2n}^+$, et

$$h_M(y, x, X) = h(y) + \langle M, xx^\top - X\rangle = h(y) \text{ si } X = xx^\top$$

- On relâche $X = xx^\top$ par les enveloppes de McCormick.

Calcul de la meilleure relaxation $\rightsquigarrow$ via (SDP)

$$
(OPF')\begin{cases}
\min h(y) \\
\text{s.t. } \langle A_k, xx^T\rangle + a_k^\top y = D_k \\
\quad \underline{v}_k \le x_k^2 + x_{k+n}^2 \le \overline{v}_k \\
\quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n},\; y \in \mathbb{R}^{2n}
\end{cases}
\xrightarrow{relax}
(OPF'_M)\begin{cases}
\min h(y) + \langle M, xx^\top - X\rangle \\
\text{s.t. } \langle A_k, X\rangle + a_k^\top y = D_k \\
\quad \underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k \\
\quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
\quad X_{ij} \le u_i x_j + \ell_j x_i - u_i \ell_j \\
\quad X_{ij} \le \ell_i x_j + u_j x_i - \ell_i u_j \\
\quad X_{ij} \ge u_i x_j + u_j x_i - u_i u_j \\
\quad X_{ij} \ge \ell_i x_j + \ell_j x_i - \ell_i \ell_j \\
\quad x \in \mathbb{R}^{2n},\; y \in \mathbb{R}^{2n},\; X \in \mathbf{S}_{2n}
\end{cases}
$$

Trouver $M^* \succeq 0$ tel que $v(OPF'_{M^*})$ soit maximale ?

Calcul de la meilleure relaxation $\rightsquigarrow$ via (SDP)

$$(OPF')\begin{cases} \min h(y) \\ \text{s.t. } \langle A_k, xx^T\rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \le x_k^2 + x_{k+n}^2 \le \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases} \xrightarrow{relax} (OPF'_{M^*})\begin{cases} \min h(y) + \langle M^*, xx^\top - X\rangle \\ \text{s.t. } \langle A_k, X\rangle + a_k^\top y = D_k \\ \quad \underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k \\ \quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\ \quad X_{ij} \le u_i x_j + \ell_j x_i - u_i \ell_j \\ \quad X_{ij} \le \ell_i x_j + u_j x_i - \ell_i u_j \\ \quad X_{ij} \ge u_i x_j + u_j x_i - u_i u_j \\ \quad X_{ij} \ge \ell_i x_j + \ell_j x_i - \ell_i \ell_j \\ \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ X \in \mathbf{S}_{2n} \end{cases}$$

Trouver $M^* \succeq 0$ tel que $v(OPF'_{M^*})$ soit maximale ?

$\rightarrow$ On construit M^* avec la solution opt. duale de la relaxation du rang.

Pour résumer l'algorithme RC-OPF

Algorithme RC-OPF

Phase 1 : Résoudre la relaxation du rang pour calculer M^*

Phase 2 : Résoudre (OPF') par un spatial b&b basé sur (OPF'_{M^*})

Pour résumer l'algorithme RC-OPF

Algorithme RC-OPF

Phase 1 : Résoudre la relaxation du rang pour calculer M^*

Phase 2 : Résoudre (OPF') par un spatial b&b basé sur (OPF'_{M^*})

Avantages

- (OPF'_{M^*}) atteint la valeur de la relaxation du rang

  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée.

Pour résumer l'algorithme RC-OPF

Algorithme RC-OPF

Phase 1 : Résoudre la relaxation du rang pour calculer M^*

Phase 2 : Résoudre (OPF') par un spatial b&b basé sur (OPF'_{M^*})

Avantages

- (OPF'_{M^*}) atteint la valeur de la relaxation du rang
  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée.
- (OPF'_{M^*}) a des contraintes linéaires.
  $\rightarrow$ le temps de résolution à chaque noeud est court.

Pour résumer l'algorithme RC-OPF

Algorithme RC-OPF

Phase 1 : Résoudre la relaxation du rang pour calculer M^*

Phase 2 : Résoudre (OPF') par un spatial b&b basé sur (OPF'_{M^*})

Avantages

- (OPF'_{M^*}) atteint la valeur de la relaxation du rang
  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée.
- (OPF'_{M^*}) a des contraintes linéaires.
  $\rightarrow$ le temps de résolution à chaque noeud est court.

Mais la taille de la relaxation est en $\mathcal{O}(n^2)$

On a $\mathcal{O}(n^2)$ égalités à forcer pour prouver l'optimalité,

$\rightarrow$ en pratique, le branch-and-bound ne converge pas.

Pour résumer l'algorithme RC-OPF

Algorithme RC-OPF

Phase 1 : Résoudre la relaxation du rang pour calculer M^*

Phase 2 : Résoudre (OPF') par un spatial b&b basé sur (OPF'_{M^*})

Avantages

- (OPF'_{M^*}) atteint la valeur de la relaxation du rang
  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée.
- (OPF'_{M^*}) a des contraintes linéaires.
  $\rightarrow$ le temps de résolution à chaque noeud est court.

Mais la taille de la relaxation est en $\mathcal{O}(n^2)$

On a $\mathcal{O}(n^2)$ égalités à forcer pour prouver l'optimalité,

$\rightarrow$ en pratique, le branch-and-bound ne converge pas.

$\rightarrow$ construire une relaxation en $\mathcal{O}(n)$

La méthode Compact OPF (COPF)

Convexification des contraintes de l'OPF

$$\begin{cases} b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\ \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\ \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases}$$

On considère l'OPF avec les limites thermiques sur les lignes

Convexification des contraintes de l'OPF

$$\begin{cases} b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \langle A_l, xx^T \rangle = s_l \\ \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\ \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ \boxed{z_k = x_k^2} \\ \boxed{w_l = s_l^2} \\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases}$$

Introduction de $2n + 2m$ variables :

- z_k qui représentent x_k^2
- w_l qui représentent s_l^2

Convexification des contraintes de l'OPF

$$\begin{cases} b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\ \boxed{\langle A_l, xx^T \rangle = s_l} \\ \underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\ s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\ \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ z_k = x_k^2 \\ w_l = s_l^2 \\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases}$$

Définition des puissances

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\boxed{\begin{array}{l} \langle A_l, xx^T \rangle \leq s_l \\ -\langle A_l, xx^T \rangle \leq -s_l \end{array}} \\
\underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\
s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Définition des puissances

i. Réécriture en deux inégalités équivalente

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\boxed{\begin{array}{l} \langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\ -\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \end{array}} \\
\underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k \\
s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Définition des puissances

i. Réécriture en deux inégalités équivalente

ii. Convexification avec la plus petite valeur propre

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
\boxed{b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y,s) = D_k} \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Flux des puissances

Convexification des contraintes de l'OPF

$$\begin{cases} \boxed{b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y,s) = D_k} \\ \langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\ -\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\ \underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\ s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\ \underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\ z_k = x_k^2 \\ w_l = s_l^2 \\ x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m} \end{cases}$$

Flux des puissances

- linéarisation avec les variables z_k

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\boxed{\underline{v}_k \leq x_k^2 + x_{k+n}^2 \leq \overline{v}_k} \\
s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Modules de tension

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\boxed{\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k} \\
s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Modules de tension

- linéarisation avec les variables z_k

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
\boxed{s_l^2 + s_{l+m}^2 \leq \overline{\mathbf{S}}_l} \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Limites thermiques

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
\boxed{w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l} \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
z_k = x_k^2 \\
w_l = s_l^2 \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Limites thermiques

- linéarisation avec les variables w_l

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top (y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\boxed{\begin{array}{l} z_k = x_k^2 \\ w_l = s_l^2 \end{array}} \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Définition des carrés des variables

Convexification des contraintes de l'OPF

$$
\begin{cases}
b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
\boxed{\begin{array}{l} x_k^2 \leq z_k \leq (u_k + \ell_k)x_k - u_k\ell_k \\ s_l^2 \leq w_l \leq (u'_l + \ell'_l)s_l - u'_l\ell'_l \end{array}} \quad \text{avec } \ell_k \leq x_k \leq u_k \text{ and } \ell'_l \leq s_l \leq u'_l \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Définition des carrés des variables

- relaxation convexe

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = \underbrace{\sum_k \left(C_k y_k^2 + c_k y_k \right)}_{\text{coûts convexes}}$$

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = \underbrace{\sum_k \left(C_k y_k^2 + c_k y_k \right)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \left(b_k (x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \right)}_{\text{conservation des flux}}$$

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = \underbrace{\sum_k \left(C_k y_k^2 + c_k y_k \right)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \left(b_k(x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \right)}_{\text{conservation des flux}}$$
$$+ \underbrace{\sum_i \gamma_l \left(A_l, xx^T \rangle - s_l \right)}_{\text{def. puissance}}$$

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = \underbrace{\sum_k \Big(C_k y_k^2 + c_k y_k \Big)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \Big(b_k (x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \Big)}_{\text{conservation des flux}}$$

$$+ \underbrace{\sum_i \gamma_l \Big(A_l, xx^T \rangle - s_l \Big)}_{\text{def. puissance}} + \underbrace{\sum_k \lambda_k \Big(x_k^2 - z_k \Big)}_{\text{perturbation diag.}}$$

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = \underbrace{\sum_k \Big(C_k y_k^2 + c_k y_k \Big)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \Big(b_k (x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \Big)}_{\text{conservation des flux}}$$

$$+ \underbrace{\sum_i \gamma_l \Big(A_l, xx^T \rangle - s_l \Big)}_{\text{def. puissance}} + \underbrace{\sum_k \lambda_k \Big(x_k^2 - z_k \Big)}_{\text{perturbation diag.}} + \underbrace{\sum_l \delta_l \Big(s_l^2 - w_l \Big)}_{\text{perturbation diag.}}$$

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = & \underbrace{\sum_k \Big(C_k y_k^2 + c_k y_k \Big)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \Big(b_k (x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \Big)}_{\text{conservation des flux}} \\
& + \underbrace{\sum_i \gamma_l \Big(A_l, xx^T \rangle - s_l \Big)}_{\text{def. puissance}} + \underbrace{\sum_k \lambda_k \Big(x_k^2 - z_k \Big)}_{\text{perturbation diag.}} + \underbrace{\sum_l \delta_l \Big(s_l^2 - w_l \Big)}_{\text{perturbation diag.}} \\
= & h(y)
\end{aligned}
$$

Si :

- (x, y, s) est une solution réalisable de (OPF)

Fonction objectif

Soient les vecteurs de paramètres $\alpha, \gamma, \lambda, \delta$, et la fonction paramétrée :

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) = & \underbrace{\sum_k \left(C_k y_k^2 + c_k y_k \right)}_{\text{coûts convexes}} + \underbrace{\sum_k \alpha_k \left(b_k (x_k^2 + x_{k+n}^2) + a_k^\top (y, s) - D_k \right)}_{\text{conservation des flux}} \\
& + \underbrace{\sum_i \gamma_l \left(A_l, xx^T \rangle - s_l \right)}_{\text{def. puissance}} + \underbrace{\sum_k \lambda_k \left(x_k^2 - z_k \right)}_{\text{perturbation diag.}} + \underbrace{\sum_l \delta_l \left(s_l^2 - w_l \right)}_{\text{perturbation diag.}} \\
= & h(y)
\end{aligned}
$$

Si :

- (x, y, s) est une solution réalisable de (OPF)
- $z_k = x_k^2$ et $w_l = s_l^2$

Une famille de relaxations quadratiques convexes

$$
(OPF_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta})
\begin{cases}
\min h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x,y,s,z,w) \\
\text{s.t.}\quad b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y,s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
x_k^2 \leq z_k \leq (u_k + \ell_k)x_k - u_k\ell_k \\
s_l^2 \leq w_l \leq (u'_l + \ell'_l)s_l - u'_l\ell'_l \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\ y \in \mathbb{R}^{2n},\ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

Une famille de relaxations quadratiques convexes

$$
(OPF_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}) \begin{cases}
\min h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) \\
\text{s.t.} \quad b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^{\top}(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T \rangle - \mathrm{ev}(-A_l) \sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
x_k^2 \leq z_k \leq (u_k + \ell_k) x_k - u_k \ell_k \\
s_l^2 \leq w_l \leq (u'_l + \ell'_l) s_l - u'_l \ell'_l \\
x \in \mathbb{R}^{2n}, \ y \in \mathbb{R}^{2n}, \ s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

On veut calculer les valeurs paramètre $(\alpha, \gamma, \lambda, \delta)$ tel que :

i. $h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w)$ soit convexe
ii. La valeur optimale de $(OPF_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta})$ soit la plus grande possible

Une famille de relaxations quadratiques convexes

$$
(OPF_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta})
\begin{cases}
\min h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w) \\
\text{s.t.} \;\; b_k(z_k + z_{k+n}) + a_k^\top(y, s) = D_k \\
\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq s_l \\
-\langle A_l, xx^T\rangle - \mathrm{ev}(-A_l)\sum_k (x_k^2 - z_k) \leq -s_l \\
\underline{v}_k \leq z_k + z_{k+n} \leq \overline{v}_k \\
w_l + w_{l+m} \leq \overline{\mathbf{S}}_l \\
\underline{p} \leq y \leq \overline{p} \\
x_k^2 \leq z_k \leq (u_k + \ell_k)x_k - u_k\ell_k \\
s_l^2 \leq w_l \leq (u_l' + \ell_l')s_l - u_l'\ell_l' \\
x \in \mathbb{R}^{2n},\; y \in \mathbb{R}^{2n},\; s \in \mathbb{R}^{2m}
\end{cases}
$$

On veut calculer les valeurs paramètre $(\alpha, \gamma, \lambda, \delta)$ tel que :

i. $h_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta}(x, y, s, z, w)$ soit convexe

ii. La valeur optimale de $(OPF_{\alpha,\gamma,\lambda,\delta})$ soit la plus grande possible

→ Utilisation de la relaxation du rang.

Quels paramètres pour atteindre la valeur de (SDP) ?

$$
(SDP)\left\{
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\
\text{s.t.} & \boxed{a_k^x (X_{kk} + X_{k+n,k+n}) + a_k^\top (y,s) = D_k} \longleftarrow \alpha \\
& \boxed{\langle A_l, X\rangle = s_l} \longleftarrow \gamma \\
& \boxed{\underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k} \longleftarrow \lambda \\
& \boxed{S_{ll} + S_{l+m,l+m} \le \overline{\mathbf{S}}_l} \longleftarrow \delta \\
& \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
& X \succeq 0,\ Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0 \\
& y \in \mathbb{R}^{2n},\ \ s \in \mathbb{R}^{2m} \\
& (X, Y, S) \in (\mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2m})
\end{array}
\right.
$$

Quels paramètres pour atteindre la valeur de (SDP) ?

$$
(SDP)\begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{k \text{ generateur}} \left(\mathbf{C}_k y_k^2 + \mathbf{c}_k y_k\right) \\
\text{s.t.} \quad \boxed{a_k^x(X_{kk} + X_{k+n,k+n}) + a_k^\top(y,s) = D_k} \longleftarrow \alpha \\
\quad \boxed{\langle A_l, X\rangle = s_l} \longleftarrow \gamma \\
\quad \boxed{\underline{v}_k \le X_{kk} + X_{k+n,k+n} \le \overline{v}_k} \longleftarrow \lambda \\
\quad \boxed{S_{ll} + S_{l+m,l+m} \le \overline{\mathbf{S}}_l} \longleftarrow \delta \\
\quad \underline{p} \le y \le \overline{p} \\
\quad X \succeq 0,\ Y - yy^\top \succeq 0,\ S - ss^\top \succeq 0 \\
\quad y \in \mathbb{R}^{2n},\ \ s \in \mathbb{R}^{2m} \\
\quad (X, Y, S) \in (\mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2n}, \mathbf{S}_{2m})
\end{cases}
$$

Théorème

Soient $(\alpha^*, \gamma^*, \lambda^*, \delta^*)$ les valeurs optimales duales de (SDP), on a :

$$v(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*}) = v(SDP)$$

Pour résumer l'algorithme COPF

Algorithme COPF

Phase 1 : Résoudre (SDP) et obtenir $(\alpha^*, \gamma^*, \lambda^*, \delta^*)$

Phase 2 : Résoudre (OPF) par un b&b basé sur $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$

Pour résumer l'algorithme COPF

Algorithme COPF

Phase 1 : Résoudre (SDP) et obtenir $(\alpha^*, \gamma^*, \lambda^*, \delta^*)$

Phase 2 : Résoudre (OPF) par un b&b basé sur $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$

Avantages

- La valeur optimale de $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$ est égale à celle de (SDP)

  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée

Pour résumer l'algorithme COPF

Algorithme COPF

Phase 1 : Résoudre (SDP) et obtenir $(\alpha^*, \gamma^*, \lambda^*, \delta^*)$

Phase 2 : Résoudre (OPF) par un b&b basé sur $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$

Avantages

- La valeur optimale de $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$ est égale à celle de (SDP)

  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée

- La taille de la relaxation est en $\mathcal{O}(n+m)$

  $\Rightarrow$ Seulement un nombre linéaire d'égalités à forcer pour prouver l'optimalité.

Pour résumer l'algorithme COPF

Algorithme COPF

Phase 1 : Résoudre (SDP) et obtenir $(\alpha^*, \gamma^*, \lambda^*, \delta^*)$

Phase 2 : Résoudre (OPF) par un b&b basé sur $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$

Avantages

- La valeur optimale de $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$ est égale à celle de (SDP)

  $\Rightarrow$ La borne à la racine est très serrée

- La taille de la relaxation est en $\mathcal{O}(n+m)$

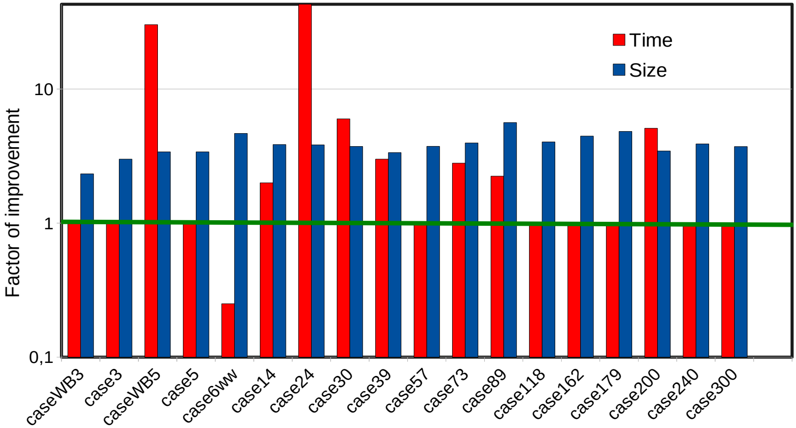
  $\Rightarrow$ Seulement un nombre linéaire d'égalités à forcer pour prouver l'optimalité.

Mais $(OPF_{\alpha^*,\gamma^*,\lambda^*,\delta^*})$ a des contraintes quadratiques

Quelques résultats expérimentaux

Résultats expérimentaux — sans limites thermiques : taille

20 instances avec au max. 300 bus, temps limite 1 heure.

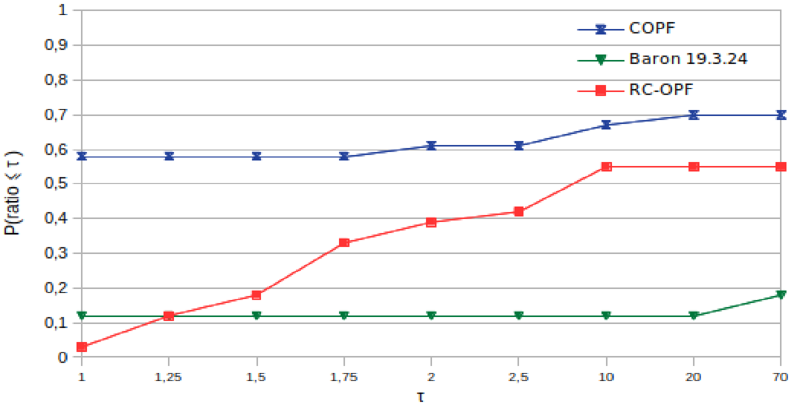


Observations :

- En moyenne la taille est réduite par une facteur 4.

Résultats expérimentaux — sans limites thermiques : CPU

20 instances avec au max. 300 bus, temps limite 1 heure.



Observations :

- En moyenne la taille est réduite par une facteur 4.
- Lors du B&B, nous ne forçons que $2n$ égalités $z_k = x_k^2$
  $\Rightarrow$ réduction du temps B&B (facteur 6 en moyenne)

Résultats expérimentaux — avec limites thermiques : CPU

Temps limite : 30 min, SDP-BT : 576 threads en parallèle, COPF : 1 thread

Instance	SDP-BT [Gopinath and al. 2020]	COPF	*Factor*
24_ieee_rts_typ	0.31	7	**22.58**
30_ieee_typ	0.27	6	**22.22**
39_epri_typ	0.52	7	**13.46**
57_ieee_typ	1.07	9	**8.41**
73_ieee_rts_typ	1.55	27	**17.42**
89_pegase_typ	9.39	57	**6.07**
118_ieee_typ	7.07	66	**9.34**
162_ieee_dtc_typ	773.94	(1.78%)	
179_goc_typ	3.57	102	**28.57**
200_activ_typ	-	122	
24_ieee_rts_api	17.38	(3.08%)	
30_ieee_api	0.44	6	**13.64**
39_epri_api	0.35	9	**25.71**
57_ieee_api	0.99	11	**11.11**
73_ieee_rts_api	67.71	(5.66%)	
118_ieee_api	408.67	(7.83%)	
162_ieee_dtc_api	1111.21	(1.52%)	
179_goc_api	6.23	112	**17.98**
200_activ_api	-	140	

Conclusion et perspectives

2 relaxations quadratiques convexes pour résoudre (OPF) :

- `RC-OPF` : QP avec $\mathcal{O}(n^2)$ variables et contraintes
- `COPF` : QCQP avec$\mathcal{O}(n)$ variables et contraintes
  $\Rightarrow$ On est capable de calculer une relaxation SOCP de (OPF) qui atteint la valeur de la relaxation du rang.

Prendre en charge des variantes de l'OPF :

- Intégrer plus de contraintes physiques
  e.g. les contraintes de limites d'angles
- Traiter les problèmes "unit commitment"
  Ajout de contraintes d'activation des générateurs en utilisant des variables binaires.
  $\Rightarrow$ Les relaxations quadratiques convexes ont été conçues à l'origine pour les problèmes en nombres entiers.

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right.$$

```
valeur opt : -2
sol opt : (1,0)
```

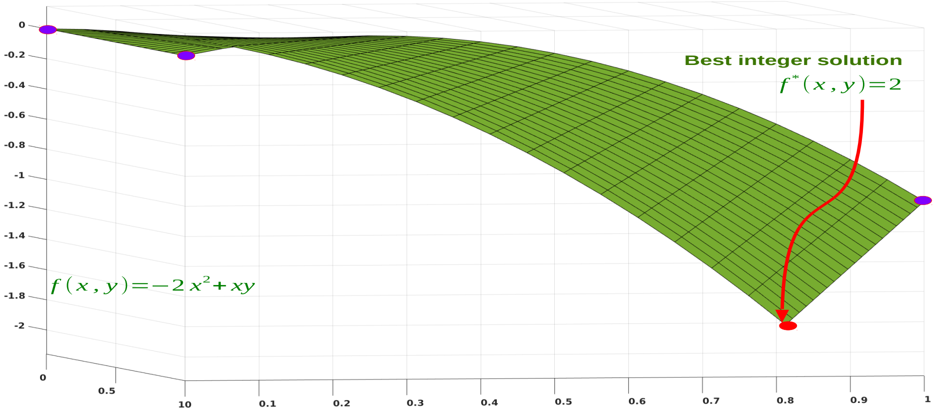
$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0$$

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right.$$

```
valeur opt : -2
sol opt : (1,0)
```

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \nsucceq 0$$



Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right.$$

`valeur opt : -2`
`sol opt : (1,0)`

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0$$

Soient λ et $f_\lambda(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{(x^2 - x + y^2 - y)}_{=0 \text{ si } x \text{ et } y \text{ binaires}} = f(x,y)$

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right.$$

```
valeur opt : -2
sol opt : (1,0)
```

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0$$

Soient λ et $f_\lambda(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{(x^2 - x + y^2 - y)}_{=0 \text{ si } x \text{ et } y \text{ binaires}} = f(x,y)$

Si $\lambda = -\lambda_{\min}(Q) = 2.1$,

$$f_\lambda(x,y) = .1x^2 + 2.1y^2 + xy - 2.1(x+y)$$

avec un Hessien $S = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.1 & 0 \\ 0 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$

Convexification par la plus petite valeur propre [Hammer and Rubin 70]

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \qquad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

Soient λ et $f_\lambda(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{\left(x^2 - x + y^2 - y\right)}_{=0 \text{ si } x \text{ et } y \text{ binaires}} = f(x,y)$

Si $\lambda = -\lambda_{\min}(Q) = 2.1$,

$$f_\lambda(x,y) = .1x^2 + 2.1y^2 + xy - 2.1(x+y)$$

avec un Hessien $S = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.1 & 0 \\ 0 & 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$

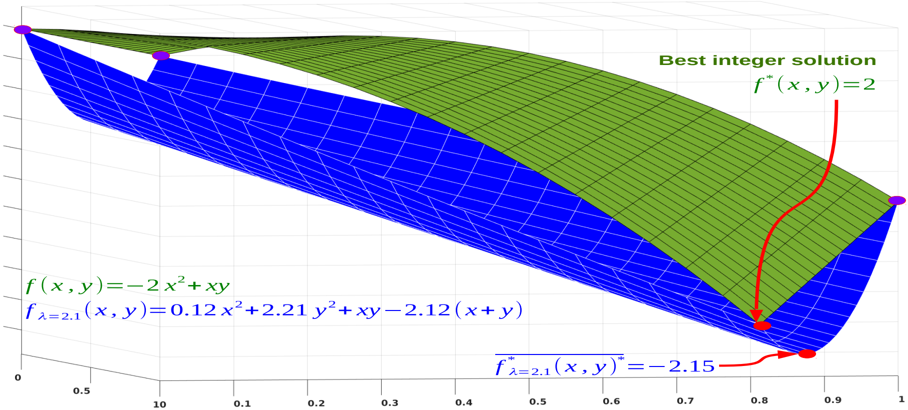
Convexification par la plus petite valeur propre [Hammer and Rubin 70]

$\Rightarrow$ on a une reformulation convexe équivalente sur chaque point binaire.

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\min_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \qquad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$$



Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \qquad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

Soient λ_1, λ_2 et $f_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda_1 \underbrace{(x^2 - x)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{(y^2 - y)}_{=0} = f(x,y)$

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \quad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

Soient λ_1, λ_2 et $f_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda_1 \underbrace{(x^2 - x)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{(y^2 - y)}_{=0} = f(x,y)$

Calculer λ_1 et λ_2 qui maximisent la borne par relaxation continue

$\Rightarrow$ utiliser la programmation semi-définie positive

$$\left\{ \begin{array}{lll} \min & -2W_{22} + 0.5(W_{23} + W_{32}) & \\ \text{s.t.} & W_{22} - 0.5(W_{12} + W_{21}) = 0 & \leftarrow \lambda_1 \\ & W_{33} - 0.5(W_{13} + W_{31}) = 0 & \leftarrow \lambda_2 \\ & W_{11} = 1 & \leftarrow \rho \\ & W \succeq 0,\ W \in \mathcal{S}^{n+1} & \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \quad -\rho \\ \text{s.t.} \\ \begin{pmatrix} \rho & -0.5\lambda_1 & -0.5\lambda_2 \\ -0.5\lambda_1 & -2+\lambda_1 & 0.5 \\ -0.5\lambda_2 & 0.5 & 0+\lambda_2 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array} \right.$$

$$\lambda_1^* = 4, \lambda_2^* = 1, \rho^* = 2$$

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \qquad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{(x,y)\in\{0,1\}} 2x^2 + y^2 \\ \qquad +xy - 4x - y \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0 \qquad S^* = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

Soient λ_1, λ_2 et $f_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) = \underbrace{-2x^2 + xy}_{f(x,y)} + \lambda_1 \underbrace{(x^2 - x)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{(y^2 - y)}_{=0} = f(x,y)$

Calculer λ_1 et λ_2 qui maximisent la borne par relaxation continue

On a un nouveau Hessien $S^* = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$

Quadratic Convex Reformulation [Billionnet, Elloumi, Plateau, 07-09]

Reformulation quadratique convexe : exemple cas binaire

$$\left\{ \min_{(x,y)\in\{0,1\}} -2x^2 + xy \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{(x,y)\in\{0,1\}} .1x^2 + 2.1y^2 \\ \qquad +xy - 2.1(x+y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{(x,y)\in\{0,1\}} 2x^2 + y^2 \\ \qquad +xy - 4x - y \end{array} \right.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \not\succeq 0 \qquad S = \begin{pmatrix} .1 & 0.5 \\ 0.5 & 2.1 \end{pmatrix} \succeq 0 \qquad S^* = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$$