

# Algorithmes convergents pour une classe de problèmes d'optimisation semi-infinie

**Antoine Oustry,**  
avec M. Cerulli, C. D'Ambrosio et L. Liberti

École des Ponts  
LIX-CNRS, École polytechnique

Axe PMNL du GDRRO - LIRMM - 26 octobre 2022

# Problème d'optimisation semi-infinie

Nous étudions la formulation

$$(SIP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & G(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

avec

- $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  convexe,
- $G: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  polynôme de degré 3, linéaire p/r à  $x$ , quadratique p/r à  $y$ ,
- $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$  compact et convexe, et  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  compact.

## Applications (1/2)

### Un jeu à somme nulle avec *pay-off* polynomial

On considère le jeu polynomial à somme nulle suivant

$$\min_{x \in S_1} \max_{y \in S_2} p(x, y) + h(x)$$

avec des ensembles de stratégies  $S_1$  (compact, convexe) et  $S_2$  (compact), avec  $x \mapsto p(x, y)$  affine pour tout  $y \in S_2$ , et  $x \mapsto h(x)$  convexe. Ce jeu peut se réécrire

$$(SIP) \begin{cases} \min_{(x,t) \in S_1 \times [0,R]} & h(x) + t \\ \text{s.c.} & p(x, y) - t \leq 0 \quad \forall y \in S_2. \end{cases}$$

## Applications (2/2)

### Régression quadratique sous contrainte de positivité

On suppose un modèle statistique de la forme

$$z = w^\top \bar{Q} w + \bar{q}^\top w + \bar{c} + \epsilon$$

avec  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Les *features*  $w$  appartiennent à un ensemble compact  $\mathcal{F}$ , et l'*output* sans bruit est **positif**.

Jeu de données  $(w^i, z^i)_{1 \leq i \leq r} \in (\mathbb{R}^n)^r \times \mathbb{R}$ , et on veut trouver les paramètres  $\bar{Q}, \bar{q}, \bar{c}$  (maximum de vraisemblance). On résout

$$(SIP) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^P (z_i - w_i^\top Q w_i - q^\top w_i - c)^2 \\ \text{s.c. } Q = Q^\top \\ \quad -(y^\top Q y + q^\top y + c) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{F} \\ \quad x = (Q, q, c) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

## Sujet de la présentation

Nous étudions la formulation

$$(SIP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & G(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

### Nos contributions

- I. Taux de convergence en  $O(\frac{1}{k})$  pour l'algorithme des plans coupants dans le cas d'une fonction objectif fortement convexe.
- II. Algorithme d'approximation interne-externe.

### Article

M. Cerulli, **A. Oustry**, C. D'Ambrosio, L. Liberti. Convergent algorithms for a class of convex Semi-Infinite programs, 2022, **SIAM Journal on Optimization**.

# Plan

Introduction

I. Taux de convergence pour l'algorithme des plans coupants

II. Algorithme d'approximation interne-externe

Conclusion

## Problème d'optimisation semi-infinie

Nous étudions la formulation

$$(SIP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & G(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{P}, \end{cases}$$

avec

- $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  convexe,
- $G: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  polynôme de degré 3, linéaire p/r à  $x$ , quadratique p/r à  $y$ ,
- $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$  compact et convexe, et  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  compact.

## Problème d'optimisation semi-infinie

### Remarque : reformulation en problème d'optimisation convexe sous contraintes

Nous pouvons voir ce problème comme un problème d'optimisation convexe sous contraintes :

$$(SIP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & \Phi(x) \leq 0, \end{cases}$$

avec  $\Phi(x) = \max_{y \in \mathcal{P}} G(x, y)$ .

**Oracle** : calculer la valeur  $\Phi(x)$  et un sous-gradient  $g \in \partial\Phi(x)$  est **coûteux** car cela requiert de résoudre un **problème d'optimisation non-convexe**.



# Algorithme des plans coupants

## Pseudo-code

- Initialisation :  $\mathcal{P}^0 \leftarrow \emptyset, k \leftarrow 0$ .
- Faire :
  - Calculer  $x^k$  une solution optimale de

$$(R^k) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & G(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{P}^k. \end{cases}$$

- Calculer  $y^k$  une solution optimale de  $\max_{y \in \mathcal{P}} G(x^k, y)$  (**Oracle**).
  - Définir  $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \cup \{y^k\}$ , puis  $k \leftarrow k + 1$ .

Tant que  $G(x^k, y^k) \leq \delta$ .

# Taux de convergence pour la programmation linéaire semi-infinie

## Revue de littérature

- Optimisation convexe sous contraintes [Nesterov '04]
  - Algorithme de l'ellipsoïde :  $O(\exp(-\alpha k))$  (mais mauvais en pratique)
  - Algorithmes de sous-gradient :  $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$
  - Algorithme d'Elzinga-Moore (variante des plans coupants) :  $O(\exp(-\beta i(k)))$ , où  $i(k)$  est le nombre d'itérés faisables générés après  $k$  itérations

# Taux de convergence pour la programmation linéaire semi-infinie

## Revue de littérature

- Optimisation convexe sous contraintes [Nesterov '04]
  - Algorithme de l'ellipsoïde :  $O(\exp(-\alpha k))$  (mais mauvais en pratique)
  - Algorithmes de sous-gradient :  $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$
  - Algorithme d'Elzinga-Moore (variante des plans coupants) :  $O(\exp(-\beta i(k)))$ , où  $i(k)$  est le nombre d'itérés faisables générés après  $k$  itérations
- Optimisation semi-infinie
  - Variantes des plans coupants spécifiques à l'optimisation linéaire semi-infinie [Gribik '79, Kortanek et No '93, Betro '03] :  $O(\exp(-\beta i(k)))$
  - Algorithme de Mitsos (optimisation semi-infinie) : pas de taux de convergence

# Taux de convergence pour la programmation linéaire semi-infinie

## Revue de littérature

- Optimisation convexe sous contraintes [Nesterov '04]
  - Algorithme de l'ellipsoïde :  $O(\exp(-\alpha k))$  (mais mauvais en pratique)
  - Algorithmes de sous-gradient :  $O(\frac{1}{\sqrt{k}})$
  - Algorithme d'Elzinga-Moore (variante des plans coupants) :  $O(\exp(-\beta i(k)))$ , où  $i(k)$  est le nombre d'itérés faisables générés après  $k$  itérations
- Optimisation semi-infinie
  - Variantes des plans coupants spécifiques à l'optimisation linéaire semi-infinie [Gribik '79, Kortanek et No '93, Betro '03] :  $O(\exp(-\beta i(k)))$
  - Algorithme de Mitsos (optimisation semi-infinie) : pas de taux de convergence

En bleu : pas de contrôle de la convergence en fonction du nombre d'appels  $k$  à l'oracle.

# Taux de convergence pour l'algorithme des plans coupants

## Notre résultat

### Hypothèses additionnelles

1.  $F(x)$  est  $\mu$ -fortement convexe.
2. Condition de Slater : il existe  $x \in \mathcal{X}$  tel que  $\Phi(x) < 0$ .

**Pas** d'hypothèse de différentiabilité pour  $F$  et  $\Phi$ , ni d'hypothèse de forte convexité pour  $\Phi$ .

### Théorème [Cerulli, Oustry, D'Ambrosio, Liberti '22]

Si l'algorithme des plans coupants exécute  $k \in \mathbb{N}$  itérations, alors

$$|F(x^k) - F(x^*)| \leq \frac{2(R L \lambda)^2}{\mu(k+2)},$$

avec  $R = \max_{Y \in \mathcal{M}} \|Y\|$ ,  $L$  une constante de Lipschitz pour  $x \mapsto \mathcal{Q}(x)$  et  $\lambda$  la variable duale optimale de la contrainte  $\Phi(x) \leq 0$ .

# Notations

- Matrice des moments  $M(y) = \begin{pmatrix} yy^T & y \\ y^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$
- Opérateur linéaire matriciel  $\mathcal{Q}(x) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  tel que  $G(x, y) = \langle \mathcal{Q}(x), M(y) \rangle$
- Ensemble des matrices de moments  $\mathcal{M} = \{M(y), y \in \mathcal{P}\}$

# Taux de convergence pour l'algorithme des plans coupants

## Notre résultat

### Hypothèses additionnelles

1.  $F(x)$  est  $\mu$ -fortement convexe.
2. Condition de Slater : il existe  $x \in \mathcal{X}$  tel que  $\Phi(x) < 0$ .

**Pas** d'hypothèse de différentiabilité pour  $F$  et  $\Phi$ , ni d'hypothèse de forte convexité pour  $\Phi$ .

### Théorème [Cerulli, Oustry, D'Ambrosio, Liberti '22]

Si l'algorithme des plans coupants exécute  $k \in \mathbb{N}$  itérations, alors

$$|F(x^k) - F(x^*)| \leq \frac{2(R L \lambda)^2}{\mu(k+2)},$$

avec  $R = \max_{Y \in \mathcal{M}} \|Y\|$ ,  $L$  une constante de Lipschitz pour  $x \mapsto \mathcal{Q}(x)$  et  $\lambda$  la variable duale optimale de la contrainte  $\Phi(x) \leq 0$ .

# Taux de convergence

## Idée de preuve

1. Remarquer que l'algorithme des plans coupants peut s'interpréter comme **l'algorithme Fully-Corrective Frank-Wolfe** appliqué au problème dual :

$$\max_{Y \in \text{cone}(\mathcal{M})} \theta(Y),$$

avec  $\theta(Y) = \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) + \langle Q(x), Y \rangle$ .

2. Prouver que  $\theta(Y)$  est **différentiable, de gradient  $\frac{R^2 L^2}{\mu}$ -Lipschitz**.
3. Adapter la preuve de convergence de **l'algorithme Fully-Corrective Frank-Wolfe** dans le cas d'un cône (contrairement à l'hypothèse classique de compacité).



# Taux de convergence

## Idée de preuve

| Perspective primale : <b>CP</b>  | Link           | Perspective duale : <b>FCFW</b>   |
|--|----------------|---|
| Résoudre la relaxation ( $R^k$ ) associée à $\mathcal{P}^k \subset \mathcal{P}$ et stocker la solution $x^k$ | Dualité forte  | Résoudre la restriction du dual<br>$\max_{Y \in \text{cone}(\mathcal{M}_k)} \theta(Y),$ et stocker la solution $Y^k$  |
| Résoudre le sous-problème<br>$\max_{y \in \mathcal{P}} G(x^k, y)$ et stocker la solution $y^k$               | $Z^k = M(y^k)$ | Résoudre le problème<br>$\max_{Z \in \mathcal{M}} \langle \nabla \theta(Y^k), Z \rangle$ et stocker la solution $Z^k$ |
| $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \cup \{y^k\}$  | $Z^k = M(y^k)$ | $\mathcal{M}^{k+1} \leftarrow \mathcal{M}^k \cup \{Z^k\}$   |

**Table:** Deux interprétations (primale et duale) d'un même algorithme

## Inconvénient de l'algorithme des plans coupants

Les points générés au cours des itérations ne sont **pas réalisables**. On obtient seulement une suite de bornes inférieures sur la valeur du problème d'optimisation semi-infinie. La **réalisabilité** est obtenue **asymptotiquement**.

# Plan

Introduction

I. Taux de convergence pour l'algorithme des plans coupants

II. Algorithme d'approximation interne-externe

Conclusion

## Approximation interne de l'ensemble faisable

### Pour l'obtention de solutions réalisables

Hypothèses additionnelles:

1.  $F(x)$  est  $\mu$ -fortement convexe.
2. Condition de Slater : il existe  $x \in \mathcal{X}$  tel que  $\Phi(x) < 0$ .
3.  $\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay \leq b\}$  est un polytope.

On dualise le sous-problème :

$$\Phi(x) = \max_{y \in \mathcal{P}} G(x, y) \leq \begin{cases} \min & -b^\top \lambda \\ \text{s.c.} & Q(x) + \mathcal{A}(\lambda) \succeq 0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^r \end{cases} = \Phi_{SDP}(x),$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire matriciel.

## Une restriction convexe “finie” du problème d'optimisation semi-infinie

Le problème original

$$(SIP) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & \Phi(x) \leq 0 \end{cases}$$

admet comme restriction

$$(P) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}} & F(x) \\ \text{s.c.} & \Phi_{SDP}(x) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{R}_+^r} & F(x) \\ \text{s.c.} & -b^\top \lambda \leq 0 \\ & \mathcal{Q}(x) + \mathcal{A}(\lambda) \succeq 0. \end{cases}$$

**Contribution** : Le problème (P) est un problème d'optimisation **convexe** avec un nombre fini de contraintes. Les précédentes approches fondées sur la dualité (ou les conditions KKT) du sous-problème menaient à des formulations “finies” mais non-convexes.

## Conditions suffisantes d'optimalités de la restriction

Une information a priori sur la convexité du sous-problème peut être exploitée.

**Théorème (condition a priori) [Cerulli, Oustry, D'Ambrosio, Liberti '22]**

Si la forme quadratique  $y \mapsto G(x, y)$  est concave quelque soit  $x \in \mathcal{X}$ , alors le problème (P) est une reformulation du problème (SIP).

Sans cette information, nous pouvons quand même tester la condition suivante après résolution de la restriction.

**Théorème (condition a posteriori) [Cerulli, Oustry, D'Ambrosio, Liberti '22]**

Soit  $x_P$  une solution optimale de (P). Si la forme quadratique  $y \mapsto G(x_P, y)$  est strictement concave, alors  $x_P$  est une solution optimale du problème (SIP).

## Que faire si ses conditions ne sont pas satisfaites ?

### Des coupes valides pour renforcer le dual du sous-problème

- Sous-problème non-convexe :

$$\Phi(x) = \max_{y \in \mathcal{P}} G(x, y) = \begin{cases} \max_y & G(x, y) \\ \text{s.c.} & Ay \leq b \end{cases}$$

- Compte tenu du calcul de  $v_\ell = \Phi(x^\ell)$  pour  $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$  et  $x^1, x^2, \dots, x^{k-1} \in \mathcal{X}$ , on ajoute des **coupes valides** :

$$\begin{cases} \max_y & G(x, y) \\ \text{s.c.} & Ay \leq b \\ & G(x^\ell, y) \leq v_\ell \quad \forall \ell \in \{1, \dots, k-1\}. \end{cases}$$

(contraintes redondantes pour le problème non-convexe, mais renforcent la relaxation SDP/duale)

## Itérations de l'algorithme

### Elargissement progressif de l'approximation interne

Le sous-problème dual devient, compte tenu du calcul de  $v_\ell = \Phi(x^\ell)$  pour  $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$  et  $x^1, x^2, \dots, x^{k-1} \in \mathcal{X}$ ,

$$\Phi_{SDP}^k(x) = \begin{cases} \min & -b^\top \lambda + \sum_{\ell=1}^{k-1} \eta_\ell v_\ell \\ \text{s.c.} & Q(x) + \mathcal{A}(\lambda) - \sum_{\ell=1}^{k-1} \eta_\ell Q(x^\ell) \succeq 0 \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^r, \eta \in \mathbb{R}_+^{k-1}. \end{cases}$$

#### Proposition [Cerulli, Oustry, D'Ambrosio, Liberti '22]

Pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\Phi(x) \leq \Phi_{SDP}^k(x) \leq \Phi_{SDP}^{k-1}(x) \leq \dots \leq \Phi_{SDP}^1(x) \leq \Phi_{SDP}(x)$ . En outre,  $\Phi(x^\ell) = \Phi_{SDP}^k(x^\ell)$  si  $\ell \leq k-1$ .



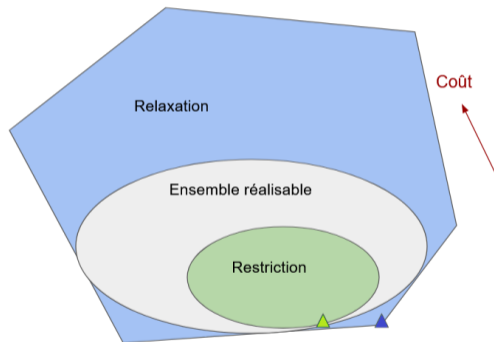
# Itérations de l'algorithme

- Initialisation :  $\mathcal{P}^0 \leftarrow \emptyset, k \leftarrow 0$ .
- Faire :
  - Calculer  $(x^k, \hat{x}^k)$  une solution optimale de

$$(R^k) \quad \begin{cases} \min_{x, \hat{x} \in \mathcal{X}} & F(x) + F(\hat{x}) + \frac{\mu}{2} \|x - \hat{x}\|^2 \\ \text{s.c.} & G(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{P}^k \\ & \Phi_{SDP}^k(\hat{x}) \leq 0. \end{cases}$$

- Calculer  $y^k$  une solution optimale de  $\max_{y \in \mathcal{P}} G(x^k, y)$  (**Oracle**).
- Définir  $\mathcal{P}^{k+1} \leftarrow \mathcal{P}^k \cup \{y^k\}$ , puis  $k \leftarrow k + 1$ .

Tant que  $G(x^k, y^k) \leq \delta_1$  et  $\|x^k - \hat{x}^k\| \leq \delta_2$ .



# Expériences numériques

## Application : Jeu à somme nulle avec *pay-off* polynomial

### Instances considérées

- On considère le jeu polynomial à somme nulle

$$\min_{x \in \Delta_n} \max_{y \in \Delta_n} -x^T M y + c_1(x) - c_2(x, y)$$

avec  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice d'adjacence d'un graphe,  $x \mapsto c_1(x)$ ,  $y \mapsto c_2(x, y)$  des polynômes quadratiques.

- Graphes de la librairie DIMACS.
- Les coefficients des polynômes  $c_1$  et  $c_2$  sont tirés aléatoirement.

### Implémentation de l'algorithme Python3 + MOSEK9.3 + Gurobi9.1

# Résultats

## Application : Jeu à somme nulle avec *pay-off* polynomial

| Instances        |     | CP algorithm |             |      |                 | IOA algorithm |             |    |                 | KKT     | Mitsos algorithm [28] |         |      |
|------------------|-----|--------------|-------------|------|-----------------|---------------|-------------|----|-----------------|---------|-----------------------|---------|------|
| Name             | $n$ | obj/LB-UB    | time(s)     | it   | % ( $P_{x^k}$ ) | obj/UB        | time(s)     | it | % ( $P_{x^k}$ ) | obj/LB  | obj/LB-UB             | time(s) | it   |
| jean_PSD         | 80  | -0.0760      | 49.5        | 183  | 23.5            | -0.0760       | <b>19.9</b> | 0  | -               | -1.0121 | -0.0760               | 128     | 171  |
| myciel4_PSD      | 23  | -0.3643      | 4.81        | 390  | 31.0            | -0.3643       | <b>0.09</b> | 0  | -               | -1.0154 | -0.3643               | 139     | 371  |
| myciel5_PSD      | 47  | -0.3164      | 21.6        | 684  | 13.1            | -0.3164       | <b>1.51</b> | 0  | -               | -1.0171 | -0.3164               | 580     | 633  |
| myciel6_PSD      | 95  | -0.2841      | 399         | 2203 | 2.8             | -0.2841       | <b>42.0</b> | 0  | -               | -1.0207 | -0.2841               | 6738    | 2008 |
| myciel7_PSD      | 191 | -0.2608      | 7498        | 5586 | 0.5             | -0.2608       | <b>3452</b> | 0  | -               | -1.9246 | -0.2608 - -0.2608     | t.l.    | 3268 |
| queen5_5_PSD     | 25  | -0.5536      | 1.73        | 165  | 39.4            | -0.5536       | <b>0.12</b> | 0  | -               | -1.0163 | -0.5536               | 19.7    | 151  |
| queen6_6_PSD     | 36  | -0.4619      | 8.98        | 511  | 22.3            | -0.4619       | <b>0.37</b> | 0  | -               | -1.0185 | -0.4619               | 168     | 458  |
| queen7_7_PSD     | 49  | -0.4054      | 31.0        | 937  | 12.1            | -0.4054       | <b>1.60</b> | 0  | -               | -1.0204 | -0.4054               | 602     | 863  |
| queen8_8_PSD     | 64  | -0.3614      | 97.0        | 1578 | 7.0             | -0.3614       | <b>4.43</b> | 0  | -               | -1.0215 | -0.3614               | 1662    | 1416 |
| queen8_12_PSD    | 96  | -0.3000      | 1194        | 4138 | 1.9             | -0.3000       | <b>36.4</b> | 0  | -               | -1.0217 | -0.3000               | 14153   | 3570 |
| queen9_9_PSD     | 81  | -0.3247      | 351         | 2637 | 3.4             | -0.3247       | <b>14.9</b> | 0  | -               | -1.0216 | -0.3247               | 5027    | 2357 |
| jean_notPSD      | 80  | 2.3979       | <b>6.82</b> | 7    | 99.5            | 2.3979        | 195         | 8  | 4.0             | 1.4095  | 2.3979                | 16.4    | 7    |
| myciel4_notPSD   | 23  | 0.5198       | <b>43.5</b> | 40   | 99.8            | 0.5198        | 52.8        | 41 | 82.9            | -0.2441 | 0.5198                | 102.6   | 40   |
| myciel5_notPSD   | 47  | 1.2779       | <b>42.4</b> | 37   | 99.7            | 1.2779        | 86.3        | 33 | 35.3            | 0.3167  | 1.2779                | 103     | 37   |
| myciel6_notPSD   | 95  | 2.9378       | <b>236</b>  | 35   | 99.9            | 2.9378        | 2223        | 38 | 11.8            | 1.7319  | 2.9378                | 615     | 35   |
| myciel7_notPSD   | 191 | 6.2486       | <b>773</b>  | 23   | 99.9            | 6.2932        | t.l.        | 4  | 0.06            | -9.2171 | 6.2486                | 1320    | 23   |
| queen5_5_notPSD  | 25  | 0.3800       | <b>21.2</b> | 51   | 99.4            | 0.3800        | 29.5        | 44 | 57.2            | -0.3318 | 0.3800                | 42.4    | 51   |
| queen6_6_notPSD  | 36  | 0.8511       | <b>293</b>  | 73   | 99.9            | 0.8511        | 350         | 68 | 81.5            | -0.0377 | 0.8511                | 751     | 73   |
| queen7_7_notPSD  | 49  | 1.3510       | <b>69.8</b> | 44   | 99.7            | 1.3510        | 161         | 40 | 40.7            | 0.3615  | 1.3510                | 174     | 44   |
| queen8_8_notPSD  | 64  | 1.8122       | <b>543</b>  | 33   | 100             | 1.8122        | 1001        | 42 | 70.1            | 0.7866  | 1.8122                | 1113    | 33   |
| queen8_12_notPSD | 96  | 2.8102       | <b>1049</b> | 34   | 100             | 2.8102        | 2525        | 32 | 32.4            | 1.6273  | 2.8102                | 1935    | 34   |
| queen9_9_notPSD  | 81  | 2.2979       | <b>2424</b> | 46   | 100             | 2.2979        | 2613        | 39 | 69.9            | 1.2042  | 2.2979                | 4545    | 46   |

# Plan

Introduction

I. Taux de convergence pour l'algorithme des plans coupants

II. Algorithme d'approximation interne-externe

Conclusion

# Contributions pour l'optimisation linéaire semi-infinie

## Dans le cadre de sous-problèmes quadratiques non-convexes

1. L'algorithme des plans coupants a un taux de convergence en  $O(\frac{1}{k})$  dans le cas où la fonction objectif est fortement convexe.
2. Nous introduisons
  - Une restriction convexe "finie",
  - Des conditions suffisantes (a priori et a posteriori) d'optimalité de cette restriction,
  - Un algorithme qui génère une suite convergente de solutions réalisables.

## Pistes de réflexions

1. Ce taux de convergence sous-linéaire est-il optimal compte tenu de nos hypothèses ?
2. Peut-on en déduire un algorithme avec un taux de convergence similaire dans le cas où la fonction objectif n'est pas fortement convexe ?
3. Peut-on espérer un taux de convergence similaire dans le cas où les sous-problèmes non-convexes sont résolus avec une erreur contrôlée  $\epsilon_k$  ?

Merci pour votre attention.

[antoine.oustry@polytechnique.org](mailto:antoine.oustry@polytechnique.org)