Version tropicale du théorème de Putinar. Dualité et résolution de problèmes linéaires en dimension infinie.

Nicolas Delanoue, nicolas.delanoue@univ-angers.fr Université d'Angers.
Daouda Niang Diatta, dndiatta@univ-zig.sn, Université A. Seck de Ziguinchor.
Algasimmou Diallo, a.diallo20140821@zig.univ.sn, Université A. Seck de Ziguinchor.

Séminaire PMNL - Lirmm - 26 octobre 2022

Le théorème de Putinar est une brique essentielle à la théorie de l'optimisation globale polynomiale. Il fournit un certificat de positivité pour des fonctions polynomiales définies sur un ensemble semi-algébrique X défini par les contraintes $g_i \geq 0$. En effet, modulo une hypothèse technique de compacité ici nommée α, tout polynôme f strictement positif sur X se décompose comme une somme pondérée des g_i par des polynômes σ_i somme de carrés. Formellement, il peut s'énoncer ainsi :

Théorème 1 (Putinar)**.** *Soit* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ *compact et* $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}[x]$. *Hypothèse* (α)*,*

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Rightarrow \exists \sigma_i \in \Sigma[x], f - \sigma_1 g_1 \cdots - \sigma_m g_m = \sigma_0. \tag{1}$$

avec $\Sigma[x]$ l'ensemble des polynômes qui s'écrivent comme une somme de carrés. On pourra noter que l'implication réciproque de (1) est triviale.

Dans cet exposé, nous proposons une version du Théorème de Putinar en géométrie tropicale. La géométrie tropicale est une branche relativement récente de l'algèbre où les deux opérations classiques d'addition et de multiplication internes sont respectivement remplacées par le maximum et l'addition. Cette approche a déjà été exploitée dans d'autres disciplines : elle permet par exemple de rendre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman linéaire [4]. Plus formellement, nous présenterons et démontrerons le théorème suivant :

Théorème 2 (Putinar tropicale)**.** *Soit* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ *compact et* $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{C}^0$. *Hypothèse* (β)*,*

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Rightarrow \exists \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \max(f, -(\sigma_1 + g_1), \ldots, -(\sigma_m + g_m)) \geq \sigma_0. \tag{2}$$

avec $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^+$ l'ensemble de fonctions constantes par morceaux et positives sur $\mathbb{R}^n$. Grâce au calcul par intervalles, ce "nouveau" théorème prend une dimension effective. En effet, en poussant l'analogie avec les travaux de Jean-Bernard Lasserre [2], dans notre approche, le calcul par intervalles joue le rôle de l'optimisation semi-définie qui permet de représenter une somme de carré σ sous la forme suivante $\sigma(x) = v_d^T(x) Q v_d(x)$ (avec $v_d(x)$ le vecteur des monomes et $Q \succeq 0$). Même si la preuve de l'implication (2) est relativement simple, cette approche permet de formaliser la résolution, avec le calcul par intervalles [1, 3], de problèmes duaux s'exprimant avec la théorie de la mesure : optimisation globale, transport optimal, contrôle optimal ….

Références

[1] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, and Eric Walter. *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics.* Springer London Ltd, 2001.

[2] Jean-Bernard Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 09 2004.

[3] Warwick Tucker. *Validated Numerics : A Short Introduction to Rigorous Computations.* Princeton University Press, USA, 2011.

[4] Huan Zhang and Peter Dower. Max-plus fundamental solution semigroups for a class of difference riccati equations. *Automatica*, 52, 04 2014.