

Décomposition bi-joint, et généralisations

Michaël Rao

LIAFA - Université Paris 7

ANR GRAAL

Décomposition modulaire

Modules

Décomposition modulaire

Cographe

Décomposition bi-joint

Généralisations aux 2-structures

Conclusion

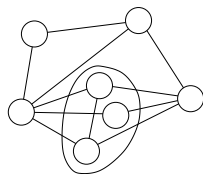
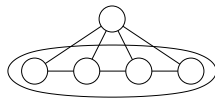
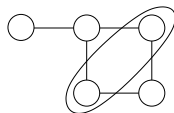
Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition (Module)

Un **module** est un ensemble X de sommets de G tel que pour chaque sommet $x \notin X$, tous les sommets de X sont adjacents à x , ou aucun sommet de X n'est adjacent à x .

Exemples :



Définitions

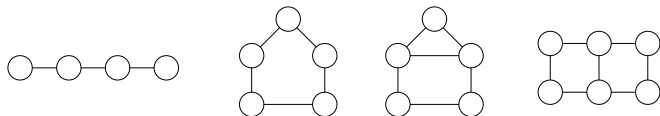
Définition (Module trivial)

Un module X est **trivial** si $X = V$ ou $|X| = 1$.

Définition (Graphe premier)

Un graphe est **premier** si tous ses modules sont triviaux.

Exemples :



Théorème de décomposition

Théorème (Gallai 67)

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec au moins deux sommets. Alors exactement une des conditions suivantes est respectée :

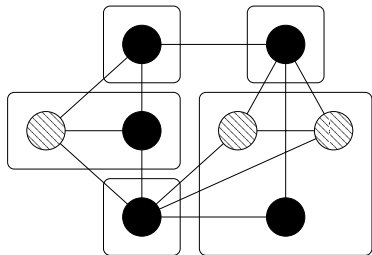
- (a) G n'est pas connexe
- (b) \overline{G} n'est pas connexe
- (c) G et \overline{G} sont connexes.

Il existe une **unique** partition P de V en modules telle que : pour $U \subseteq V$ avec $|U \cap S| = 1$ pour tout $S \in P$, $G[U]$ est un sous graphe premier **maximal** de G .

Opérations de décomposition

- (a) G n'est pas connexe : G est décomposé en les graphes induits par ses composantes connexes.
- (b) G n'est pas co-connexe : G est décomposé en les graphes induits par les composantes connexes de \overline{G} .
- (c) sinon, G est décomposé en les sous-graphes induits par les ensembles de P .

$G[U]$ est le **graphe caractéristique** de G .



Décomposition modulaire

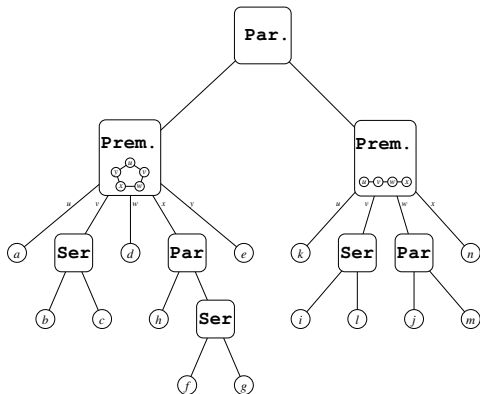
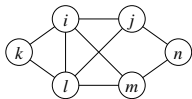
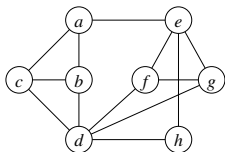
La **décomposition modulaire** est la décomposition récursive d'un graphe, jusqu'à ce qu'on ait plus que des graphes d'un seul sommet.

Elle peut être représentée par un arbre, dont les noeuds internes sont étiquetés **parallèle**, **série** ou **premier**, qui correspondent aux opérations (a), (b) et (c).

Si l'opération est **premier**, le noeud dispose aussi du graphe caractéristique.

Elle est **unique** [Gallai 67]. Elle peut être calculée en temps **linéaire** [Cournier, Habib 94 ; McConnell, Spinrad 94].

Exemple



Cographes

Les graphes complètement décomposables par la décomposition modulaire sont les **cographes**.

Théorème (Corneil, Lerchs, Stewart 81 ; Sumner 73)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ▶ *G est un cographe.*
- ▶ *G n'a pas de P_4 induit.*
- ▶ *G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai jumeau ou ajout d'un faux jumeau.*



Décomposition modulaire

Décomposition bi-joint

Définition

Familles (bi)-partitives

Décomposition bi-joint

Graphes sans C_5 , taureau, gem et co-gem induit

Graphes sans gem et co-gem induit

Généralisations aux 2-structures

Conclusion

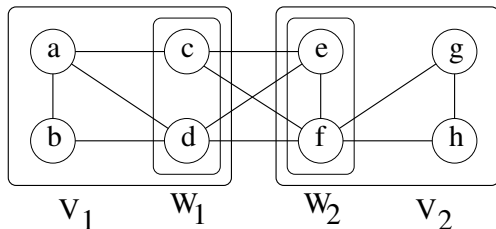
- ▶ La **décomposition en coupes** (*split decomposition*) a été introduite par [Cunhningham 82].
 - ▶ Elle généralise la décomposition modulaire.
 - ▶ Elle est unique [Cunhningham 82], et calculable en temps linéaire [Dahlhaus 00].
-
- ▶ La **décomposition bi-joint** a été introduite par [de Montgolfier 2003].
 - ▶ Elle généralise la décomposition modulaire.

Coupe

Définition (Cunningham 82)

Une **coupe** dans un graphe est une bi-partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle qu'il existe $W_1 \subseteq V_1$ et $W_2 \subseteq V_2$ avec

- ▶ tous les sommets de W_1 sont adjacents avec tous les sommets de W_2 ,
- ▶ il n'y a pas d'autres arêtes entre V_1 et V_2 .



Bi-joint

Définition (de Montgolfier 03)

Un **bi-joint** dans un graphe est une bi-partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle qu'il existe $W_1 \subseteq V_1$ et $W_2 \subseteq V_2$ avec

- ▶ tous les sommets de W_1 sont adjacents avec les sommets de W_2 ,
- ▶ tous les sommets de $V_1 \setminus W_1$ sont adjacents avec les sommets de $V_2 \setminus W_2$,
- ▶ il n'y a pas d'autres arêtes entre V_1 et V_2 .

Bi-joint : Exemple

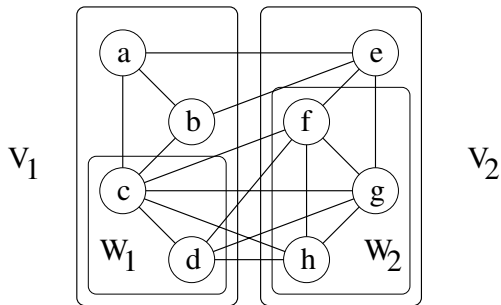


Fig.: Un bi-joint $\{V_1, V_2\}$ dans un graphe.

Familles partitives

Définition (Famille partitive)

Une famille \mathcal{F} de sous ensembles de V est **partitive** si :

- ▶ $V \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et pour tout $v \in V$, $\{v\} \in \mathcal{F}$,
- ▶ pour tout $X, Y \in \mathcal{F}$ tels que X chevauche Y , on a :
 - (1) $X \cup Y \in \mathcal{F}$,
 - (2) $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
 - (3) $X \setminus Y \in \mathcal{F}$,
 - (4) $Y \setminus X \in \mathcal{F}$,
 - (5) et $X \Delta Y \in \mathcal{F}$.

La famille est **faiblement partitive** si toutes les conditions sont respectées sauf la (5).

Familles bi-partitives

Définition (Famille bi-partitive)

Une famille \mathcal{F} de bi-partitions de V est **bi-partitive** si :

- ▶ $\{V, \emptyset\} \notin \mathcal{F}$ et pour tout $v \in V$, $\{\{v\}, V \setminus \{v\}\} \in \mathcal{F}$,
- ▶ pour tout $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\} \in \mathcal{F}$ tels que $\{X_1, X_2\}$ chevauche $\{Y_1, Y_2\}$, on a :
 - (1) $\{X_1 \cap Y_1, X_2 \cup Y_2\} \in \mathcal{F}$,
 - (2) $\{X_1 \cap Y_2, X_2 \cup Y_1\} \in \mathcal{F}$,
 - (3) $\{X_2 \cap Y_1, X_1 \cup Y_2\} \in \mathcal{F}$,
 - (4) $\{X_2 \cap Y_2, X_1 \cup Y_1\} \in \mathcal{F}$,
 - (5) et $\{X_1 \Delta Y_1, X_1 \Delta Y_2\} \in \mathcal{F}$.

La famille est **faiblement bi-partitive** si toutes les conditions sont respectées sauf la (5).

Familles bi-partitives

Théorème (Chein, Habib, Maurer 81)

La famille des modules d'un graphe est une famille partitive.

Théorème (Cunningham 82)

La famille des coupes d'un graphe connexe est une famille bi-partitive.

Théorème (de Montgolfier 03)

La famille des bi-joints dans un graphe est une famille bi-partitive.

Les familles partitives peuvent être représentées uniquement par un arbre enraciné [Chein Habib Maurer 81].

Les familles bi-partitive peuvent être représentées uniquement par un arbre non enraciné [Cunningham Edmonds 80].

- ▶ L'arbre représentatif des modules est exactement l'arbre de décomposition modulaire.
- ▶ L'arbre représentatif des coupes est exactement l'arbre de décomposition en coupes.
- ▶ L'arbre représentatif des bi-joints est **l'arbre de décomposition bi-joint**.

Arbre représentatif des familles bi-partitives

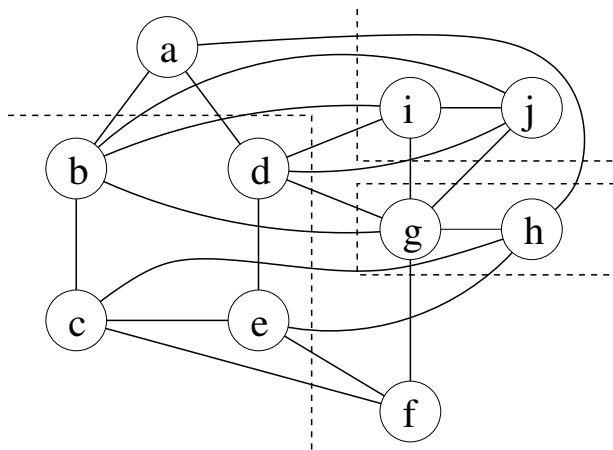
Un membre d'une famille (bi)-partitive est **fort** si aucun autre membre de la famille ne le chevauche.

L'arbre représentatif de la famille est l'arbre d'inclusion des membres forts.

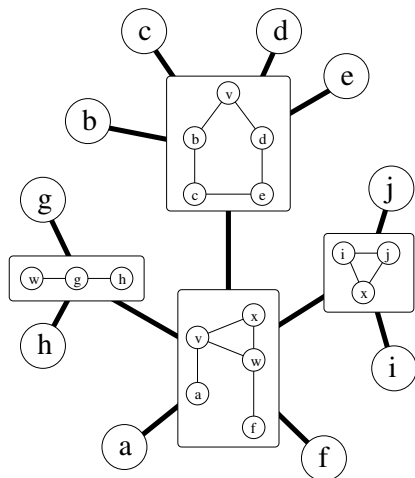
Chaque noeud interne de l'arbre peut être étiqueté **premier** ou **dégénéré**, tel que toutes les unions de fils d'un noeud dégénéré soit dans la famille (et qu'il n'y ait pas d'autres membres).

Si la famille est faiblement (bi)-partitive, alors un troisième type de noeuds apparaît : les noeuds **linéaires**.

Exemple



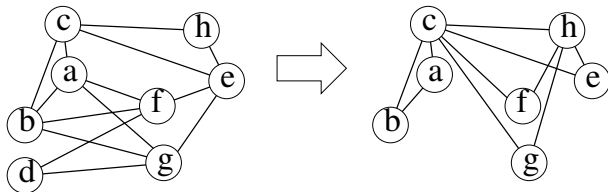
Exemple : arbre de décomposition



Relation avec les modules

Définition

Le **complémentaire voisinage-non-voisinage** d'un graphe $G = (V, E)$ au sommet $v \in V$, noté \overline{G}^v , est le graphe obtenu en supprimant v et en inversant la relation d'adjacence entre $N(v)$ et $V \setminus N[v]$.



Théorème (de Montgolfier, Rao 05)

Soit $\{V_1, V_2\}$ une bi-partition de V et $v \in V_1$. Alors $\{V_1, V_2\}$ est un bi-joint de G si et seulement si V_2 est un module de \overline{G}^v .

Corollaire

La famille des bi-joints d'un graphe est bi-partitive.

Corollaire

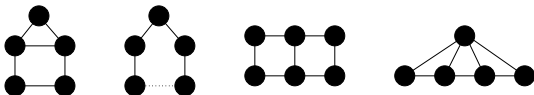
La décomposition bi-joint peut être calculée en temps linéaire.

Un graphe est **distance héréditaire** si tous les chemins sans cordes entre deux sommets ont la même longueur.

Théorème (Bandelt, Mulder 84 ; Hammer, Maffray 90)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ▶ *G est complètement décomposable par la décomposition en coupes,*
- ▶ *G est un graphe distance héréditaire,*
- ▶ *G n'a pas de maison, trou, domino et gem induit,*

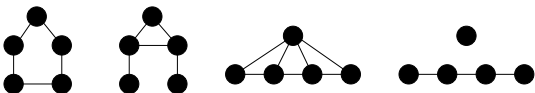


- ▶ *G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai/faux jumeau ou ajout d'un sommet pendent.*

Théorème (de Montgolfier, Rao 05)

Les conditions suivantes sont équivalentes

- ▶ G est complètement décomposable par la décomposition bi-joint ;
- ▶ G est sans C_5 , taureau, gem et co-gem induit ;



- ▶ G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai/faux jumeau ou ajout d'un vrai/faux anti-jumeau.

Idée de la preuve

On montre que ces conditions sont équivalentes à :

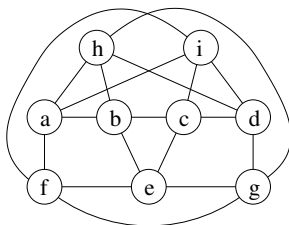
- ▶ pour $v \in V$, \overline{G}^v est un cographe ;



Décomposition des graphes sans gem et co-gem induit

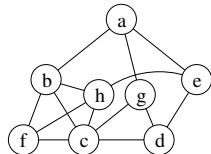
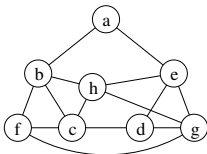
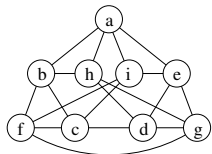
Lemme

Soit G un graphe sans C_5 , gem et co-gem induit, premier par la décomposition bi-joint. Alors soit G est sans C_5 , taureau, gem et co-gem induit, soit G est un sous-graphe induit du graphe suivant.



Lemme

Soit G un graphe sans gem et co-gem induit, premier par la décomposition bi-joint. Alors G est sans C_5 induit, ou G est le sous-graphe induit d'un des graphes suivants.



Corollaire

Soit G un graphe sans gem et co-gem induit. Alors les graphes caractéristiques dans la décomposition bi-joint de G ont au plus 9 sommets.

Décomposition modulaire

Décomposition bi-joint

Généralisations aux 2-structures

- Définition

- Bi-partitivité

- Arbre de décomposition

- Cas particuliers

- Algorithmes

Conclusion

2-Structures

Soit \mathcal{Z} un ensemble. Une **2-structure** sur \mathcal{Z} est un couple (V, e) , où V est l'ensemble des **sommets** et $e : V \times V \rightarrow \mathcal{Z}$ est la **fonction d'adjacence**.

Une 2-structure (V, e) est **symétrique** si $e(u, v) = e(v, u)$ pour tous $u, v \in V$.

Exemples :

- ▶ Les graphes orientés : 2-structures sur \mathbb{Z}_2 .
- ▶ Les graphes non-orientés : 2-structures sur \mathbb{Z}_2 symétriques.

σ -Symétrie

Soit $\sigma : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ une involution (c.à.d. $\sigma(\sigma(x)) = x$ pour tout $x \in \mathcal{Z}$).

Une 2-structure (V, e) est σ -**symétrique** si $e(u, v) = \sigma(e(v, u))$ pour tout $u, v \in V$.

Une 2-structure sur \mathcal{Z} peut être vue comme une 2-structure σ -symétrique sur \mathcal{Z}^2 , avec $\sigma((x, y)) = (y, x)$.

Exemples :

- ▶ Les graphes orientés : 2-structures sur \mathbb{Z}_2^2 σ -symétriques avec $\sigma((x, y)) = (y, x)$.
- ▶ Les tournois : 2-structures sur \mathbb{Z}_2 σ -symétriques avec $\sigma(x) = 1 - x$.

Groupes Abéliens

$(\mathcal{Z}, +)$ est un **groupe Abélien** si il respecte les axiomes suivants :

- ▶ Élément neutre : $\exists 0 \in \mathcal{Z}, \forall a \in \mathcal{Z}, a + 0 = 0 + a = a$.
- ▶ Inverse : $\forall a \in \mathcal{Z}, \exists b \in \mathcal{Z}, a + b = b + a = 0$.
- ▶ Associativité : $\forall a, b, c \in \mathcal{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
- ▶ Commutativité $\forall a, b \in \mathcal{Z}, a + b = b + a$.

G-joints

On fixe un groupe Abélien $(\mathcal{Z}, +)$.

Définition (G-joint)

Soit $G = (V, e)$ une 2-structure sur \mathcal{Z} . Un couple (X, Y) tel que $V = X \uplus Y$ est un $(\mathcal{Z}, +)$ -**G-joint** (ou **G-joint**) si il existe $(X_i)_{i \in \mathcal{Z}}$ et $(Y_i)_{i \in \mathcal{Z}}$ tels que :

- ▶ $X = \bigsqcup_{i \in \mathcal{Z}} X_i$,
- ▶ $Y = \bigsqcup_{i \in \mathcal{Z}} Y_i$, et
- ▶ $\forall u \in X_i, \forall v \in Y_j, e(i, j) = i + j$.

Proposition

Si X est un module, alors $(X, V \setminus X)$ et $(V \setminus X, X)$ sont des G-joints.

Lemme d'intersection

Lemme

Soient G une 2-structure, et (X, Y) et (X', Y') deux G -joints tels que $X \cap X' \neq \emptyset$ et $Y \cap Y' \neq \emptyset$.

Alors $(X \cap X', Y \cup Y')$ est un G -joint de G .

Démonstration

Soit $X = \biguplus_i X_i$, $Y = \biguplus_j Y_j$, t.q. $\forall u \in X_i, v \in Y_j, e(u, v) = i + j$.

Soit $X' = \biguplus_{i'} X'_{i'}$, $Y' = \biguplus_{j'} Y'_{j'}$, t.q. $\forall u \in X'_{i'}, v \in Y'_{j'}, e(u, v) = i' + j'$.

$v \in Y_j \cap Y'_{j'}. \Rightarrow X \cap X' = \biguplus_i X_i \cap X'_{i+j-j'}$

$u \in X_i \cap X'_{i'}. \Rightarrow i' = i + j - j'$ et $Y \cap Y' = \biguplus_k Y_k \cap Y'_{k+j'-j}$.

Soit $X''_i = X_i \cap X'_{i+j-j'}$ et $Y''_k = Y_k \cup Y'_{k+j'-j}$.

Pour tout $u \in X''_i$ et $v \in Y''_k$, $e(u, v) = i + k$. □

σ -symétrie

Soit σ une involution telle que $\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a + b) + \sigma(0)$ (c.à.d. $x \rightarrow \sigma(x) - \sigma(0)$ est un isomorphisme pour $(\mathcal{Z}, +)$).

Lemme

Alors (X, Y) est un G -joint si et seulement si (Y, X) est un G -joint.

Démonstration

On prend $X'_i = Y_{\sigma(i)}$ et $Y'_j = X_{\sigma(j) - \sigma(0)}$. Pour $u \in X'_i$ et $v \in Y'_j$,
 $e(u, v) = \sigma(e(v, u)) = \sigma(\sigma(i) + \sigma(j) - \sigma(0)) = \sigma(\sigma(i + j))$. \square

On dira simplement que $\{X, Y\}$ est un G -joint si (X, Y) et (Y, X) sont des G -joints.

Bi-partitivité

Corollaire

La famille de G – joints d'une 2-structure σ -symétrique est faiblement bi-partitive.

Un G -joint est **trivial** si $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

Une 2-structure est **première** si tous ses G -joints sont triviaux. Une 2-structure est **dégénérée** si toutes les bipartitions de V sont des G -joints.

Un G -joint est **fort** si c'est un membre fort de la famille faiblement bi-partitive des G -joints (c.à.d. aucun autre G -joint ne le chevauche).

Lemme

Soit $G = (V, e)$ une 2-structure symétrique, et $\{X, Y\}$ et $\{X', Y'\}$ deux G -joints qui se chevauchent. Alors $\{X \Delta X', X \Delta Y'\}$ est un G -joint.

Démonstration

Soient $v \in Y \cap Y'$, $w \in X \cap Y'$, et soient j, j', l, l' t.q. $v \in Y_j \cap Y'_{j'}$ et $w \in X_l \cap Y'_{l'}$.

$$X''_k = (X_k \cap X'_{k+j-j'}) \cup (Y_{k+j-j'+l'-l} \cap Y'_{k+l'-l})$$

et $Y''_k = (Y_k \cap X'_{k+l-l'}) \cup (X_{k+j'-j+l-l'} \cap Y'_{k+j'-j}).$ □

Corollaire

La famille de G – joints d'une 2-structure symétrique est bi-partitive.

Décomposition simple

Soit $G = (V, E)$ une 2-structure et $\{X, Y\}$ un G -joint non-trivial. Une **décomposition simple** de G par $\{X, Y\}$ est la décomposition en $G_1 = G[V_1]$ et $G_2 = G[V_2]$ tel que $V_1 = X \cup \{y\}$, $V_2 = Y \cup \{x\}$ avec $x \in X$ et $y \in Y$. Le **triplet marqueur** est $(x, y, e(x, y))$.

Lemme

Soit G_1 et G_2 la décomposition simple de G par le G -joint $\{X, Y\}$. Soit $X' \subset X$. Alors $\{X', V_1 \setminus X'\}$ est un G_1 -joint si et seulement si $\{X', V \setminus X'\}$ est un G -joint de G .

Décomposition G-joint

L'ensemble des **décompositions** de G est défini récursivement :

- ▶ $(\{G\}, \emptyset)$ est une décomposition,
- ▶ si (\mathcal{D}, M) est une décomposition, et $H \in \mathcal{D}$ se décompose en H_1 et H_2 avec le triplet marqueur m , alors $(\mathcal{D} \setminus \{H\} \cup \{H_1, H_2\}, M \cup \{m\})$ est une décomposition.

Une décomposition est (\mathcal{D}, M) **minimale** si toutes les 2-structures dans \mathcal{D} sont premières.

Une décomposition est **standard** si elle n'est issue que de décompositions simples fortes, et toutes les 2-structures n'ont pas de G-joint fort non-trivial.

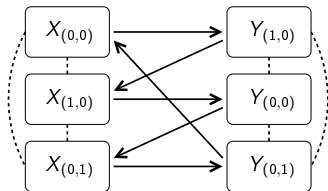
L'arbre d'une décomposition standard est isomorphe à l'arbre représentatif de la famille bi-partitive de la familles des G-joints : il est unique.

Cas particuliers

- ▶ La décomposition bi-joint des graphes non orientés est la décomposition $(\mathbb{Z}_2, +)$ -G-joint. (avec $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)
- ▶ La décomposition bi-joint des tournois est la décomposition $(\mathbb{Z}_2, +)$ -G-joint. (avec $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)
- ▶ Sur les graphes orientés antisymétriques :

$$\sigma = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{bmatrix}.$$

+	(0,0)	(1,0)	(0,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)
(1,0)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)



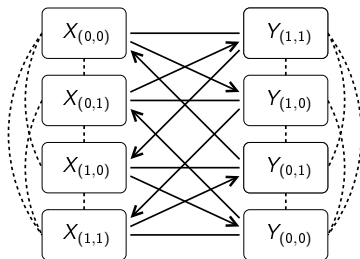
Décomposition des graphes orientés (1)

$$\sigma = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{bmatrix}.$$

Il y a deux groupes abéliens d'ordre 4 : $(\mathbb{Z}_2^2, +)$ et $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Cas 1 : $(\mathcal{Z}, +) = (\mathbb{Z}_2^2, +)$.

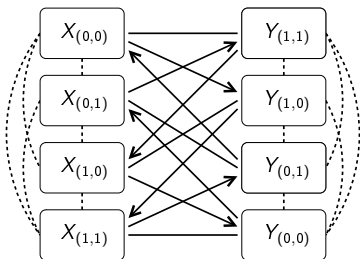
+	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(0,0)	(1,1)	(0,1)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	(0,0)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)



Décomposition des graphes orientés (2)

Cas 2 : $(\mathcal{Z}, +)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}_4, +)$.

+	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)



Trouver un G-joint non trivial

Entrée : $G = (V, e)$ et $u, v \in V$, $u \neq v$.

Sortie : un G-joint $\{X, Y\}$ non trivial t.q. $u \in X$ et $v \in Y$, si il existe.

W.l.o.g $u \in X_0$ et $v \in Y_{e(u,v)}$.

Soit $w \in V \setminus \{u, v\}$.

Si $w \in X$, alors $w \in X_{e(w,v)-e(u,v)}$.

Si $w \in Y$, alors $w \in Y_{e(u,w)}$.

\Rightarrow Se réduit à un problème 2-SAT, sans littéral négatif.

Variables : sommets de $V \setminus \{u, v\}$ (Vrai : dans X , Faux : dans Y)

Il y a une solution non triviale si et seulement si le graphe de forçage n'est pas fortement connexe.

Temps : $O(n^2)$.

Calculer une décomposition minimale

Entrée : $G = (V, e)$.

Sortie : une décomposition minimale de G .

(Algorithme naïf en temps $O(n^4)$.)

On garde en mémoire les sous ensembles D tels qu'il n'y ait aucun G-joint fort qui chevauche D .

L'ensemble \mathcal{D} des ces sous ensembles forme une partition de V .

À chaque étape, soit on trouve un G-joint non trivial, soit $|\mathcal{D}|$ diminue.

Il y a au plus n appels à la sous routine précédente. **Temps :** $O(n^3)$.

Calculer une décomposition standard

Entrée : $G = (V, e)$.

Sortie : une décomposition standard de G .

On calcule une décomposition minimale.

Pour chaque arête de la décomposition :

On teste si l'arête provient d'un G-joint fort.

Si non, on contracte l'arête.

Temps : $O(n^3)$

Conclusion

- ▶ La décomposition bi-joint est une généralisation de la décomposition modulaire
- ▶ Elle se généralise aux 2-structures.
- ▶ La décomposition bi-joint peut être définie sur les **two-graphs**.

Perspectives futures :

- ▶ Généralisation de la décomposition en coupes sur les 2-structures ?
- ▶ Généralisation de la décomposition bi-joint sur les 3-hypergraphes ?
- ▶ Vers d'autres décompositions : U-modules, k -modules...