Complexité paramétrée

Christophe Paul

Examen Janvier 2014

Notes de cours autorisées. **2h30**

Note: La clarté, la concision et ainsi que la complétude des preuves seront prises en compte dans la notation. Le sujet est beaucoup trop long, n'essayer pas de tout faire, mais essayez d'attaquer au moins une question difficile, marquée par ($\star$) ou ($\star\star$).

1 Non-existence de noyau polynomial

Nous noterons vc-Dominating Set le problème Dominating Set paramétré par la taille d'un vertex cover et Vertex Cover le problème de décision consistant à tester si un graphe possède un vertex cover de taille k fixée. Nous avons vu en cours que le problème vc-Dominating Set n'admettait pas de noyau polynomial (sous les hypothèses de complexité standards). La preuve repose sur une composition croisée depuis le problème de décision Vertex Cover. L'objectif de cet exercice est de fournir deux preuves alternatives de ce résultat.

1.1 Composition croisée depuis Vertex Cover

Soit une séquence $G_1 = (V_i, E_i) \dots G_t = (V_t, E_t)$ d'instances du problème de décision Vertex Cover avec $t = 2^h$ pour $h \in \mathbb{N}$. Nous supposerons que chaque instance G_i ($1 \leqslant i \leqslant t$, il s'agit de décider si G_i possède un vertex cover de taille k. Nous supposerons aussi que $|V_i| = |V_j| = n$ pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant t$.

L'iinstance (G, k') de vc-Dominating Set paramétré par la taille k' d'un Vertex Cover est construite de la manière suivante (voir figure 1) :

- l'ensemble des sommets $V(G)$ de G est composé :
  - d'un ensemble $S = \bigcup_{1 \leqslant r \leqslant k} S_r$ avec $S_r = \{v_1^r \dots v_n^r\} \cup \{y_r\}$ pour chaque $1 \leqslant r \leqslant k$ représentant les n sommets de chaque instance $G_1 \dots G_t$;
  - d'un ensemble $V_E = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant t} V_{E_i}$ représentant les arrêtes des instances $G_1 \dots G_t$ avec $V_{E_j} = \{v_e \mid e \in E_j\}$;
  - d'un ensemble de sommets $B = \{a_i \mid 1 \leqslant \ell \leqslant h\} \cup \{1_i \mid 1 \leqslant \ell \leqslant h\} \cup \{0_i \mid 1 \leqslant \ell \leqslant h\}$.
- l'ensemble des arêtes $E(G)$ de G est composé de la manière suivante :
  - les ensembles S_R, pour $1 \leqslant r \leqslant k$, sont des cliques;
  - pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant k$ et tout $v_e \in V_{E_j}$ ($1 \leqslant j \leqslant t$) : $(v_i^r, v_e) \in E(G)$ si et seulement si $v_i \in V_j$ est incident à l'arête $e \in E_j$;

– pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant h$: $(a_\ell, 1_\ell) \in E(G)$, $(a_\ell, 0_\ell) \in E(G)$, $(0_\ell, 1_\ell) \in E(G)$;

– pour tout $1 \leqslant j \leqslant t$ tel que l'écriture binaire de j est $b_1 \dots b_\ell \dots b_h$ et pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant h$: $V_{E_j} \subseteq N(1_\ell)$ si et seulement si $b_\ell = 1$; de même, $V_{E_j} \subseteq N(0_\ell)$ si et seulement si $b_\ell = 0$.

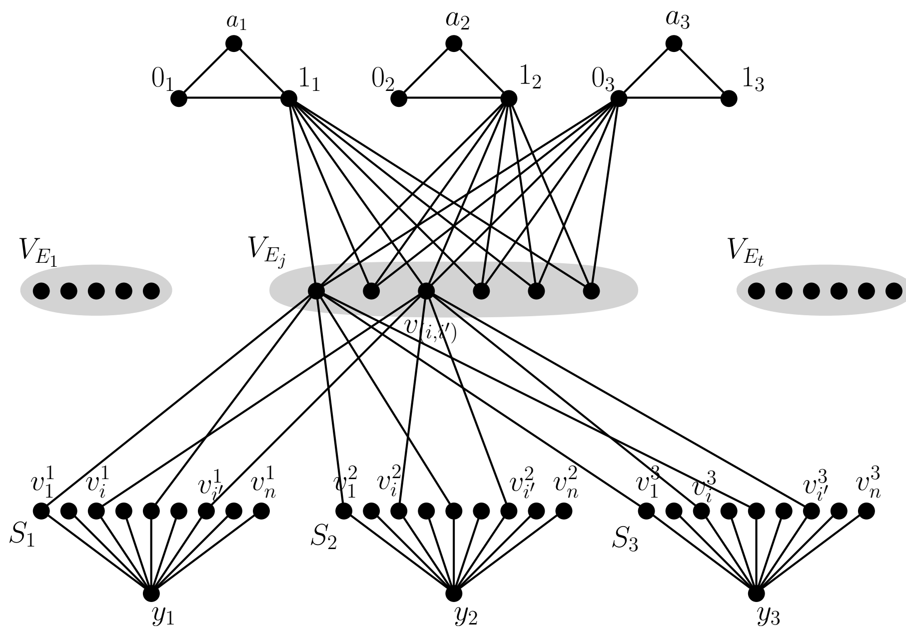

Figure 1: construction d'une instance (G, k') de vc-Dominating Set paramétré par la taille k' d'un vertex cover depuis une séquence de graphes $G_1, \dots G_t$, instances du problème de décision Vertex Cover (pour $k = 3$). L'écriture binaire de j est $b_1 b_2 b_3 = 110$; le sommet $v_{i,i'} \in V_{E_j}$, représentant l'arête $e = (i, i') \in E_j$, est adjacent aux sommets v_i^r et $v_{i'}^r$ de S_r pour tout $1 \leqslant r \leqslant k$.

Q1. Montrer que tout ensemble dominant de G doit intersecter $\{a_\ell, 1_\ell, 0_\ell\}$ pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant h$.

Q2. Montrer qu'il existe un ensemble dominant optimal de G évitant a_ℓ pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant h$.

Q3. Montrer que tout ensemble dominant de G intersecte S_r, pour tout $1 \leqslant r \leqslant k$. Montrer qu'il existe un ensemble dominant optimal de G évitant y_r, pour tout $1 \leqslant r \leqslant k$.

Q4. En conclure que si G possède un ensemble dominant D de taille $k + h$, alors D évite les ensemble V_{E_j} pour $1 \leqslant j \leqslant t$.

Q5. Supposons que G possède un ensemble dominant D de taille $k' = k + h$ tel que pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant h$, $0_\ell \in D$. Quels sont les sommets de V_E non dominés par $D \cap B$.

Q6. Déduire des questions précédentes que si G possède un ensemble dominant D de taille $k' = k + h$ alors il existe un graphe G_i possédant un vertex cover de taille k.

Q7. Supposons que le graphe G_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ possède un vertex cover de taille k, montrer que G possède un ensemble dominant de taille $k' = k + h$. Vous décrirez précisément cet ensemble dominant.

Q8. Pour conclure la composition croisée, montrer que G possède un vertex cover de taille polynomial en $n + \log t = n + h$.

1.2 Composition croisée depuis vc-Dominating Set

On souhaite adapter la construction précédente pour obtenir une composition croisée depuis le problème de décision Dominating Set vers vc-Dominating Set.

Q9. ($\star$) Décrire les modifications nécessaires à la nouvelle construction et démontrer que ces modifications définissent une composition croisée.

2 Largeur arborescente et programmation dynamique

2.1 Théorème de Courcelle et p-Feedback Vertex Set

Nous notons p-Feedback Vertex Set le problème Feedback Vertex Set paramétré par la taille de la solution : il s'agit de supprimer k sommets pour obtenir un graphe acyclique (une forêt). L'objectif de cet exercice est de montrer que le problème p-Feedback Vertex Set est FPT à l'aide du théorème de Courcelle puis de proposer un algorithme de programmation dynamique.

Q10. Soit $G = (V, E)$ un graphe ayant un feedback vertex set S de taille k. Montrer que $tw(G) \leqslant k + 1$. Pour cela vous décrirez la construction d'une décomposition arborescente de G.

Q11. On souhaite exprimer l'existence d'un feedback vertex set de taille au plus k en logique MSO.

- **a.** Soit (x, y) une arête d'un graphe $G = (V, E)$. Montrer que G contient un cycle passant par x et y si et seulement si pour toute bipartition (V_x, V_y) de V telle que $x \in V_x$ et $y \in V_y$, il existe une arête $(u, v) \in E \setminus \{(x, y)\}$ telle que $u \in V_x$ et $v \in V_y$.
- **b.** Exprimer l'existence d'un cycle dans un graphe à l'aide d'une expression Φ_c en logique MSO.
- **b.** Exprimer l'existence d'un feedback vertex set de taille k dans un graphe $G = (V, E)$ à l'aide d'une expression Φ_{FVS} en logique MSO.

Q12. En déduire que le problème p-Feedback Vertex Set est FPT.

2.2 Programmation dynamique et tw-Vertex Cover

Nous notons tw-Vertex Cover le problème Vertex Cover paramétré par la largeur arborescente. Nous souhaitons résoudre ce problème par programmation dynamique. Soit G un graphe tel que $\mathbf{tw}(G) \leqslant k$ et soit $\mathcal{T} = (T, \mathcal{B})$ une décomposition arborescente simple de G.

Soit t un nœud de T, nous noterons $X_t \in \mathcal{B}$ l'ensemble de sommets associé dans $\mathcal{T}$ au nœud t, V_t l'union des $X_{t'}$ pour tout t' descendant de t dans T et $G_t = G[V_t]$. Pour tout $S \subseteq X_t$, nous définissons:

$$VC(S, t) = |Y| \text{ tel que } Y \text{ est un vertex cover minimum de } G_t \text{ vérifiant } X_t \cap Y = S$$

Q13. Quel est le nombre d'entrées (en fonction de $\mathbf{tw}(G)$) dans les tables de programmation dynamique ?

Q14. Décrire la mise à jour des tables de programmation dynamique pour

a. un nœud *feuille*

b. un nœud *ajout* t dont le fils est t' et $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$

c. un nœud *suppression* t dont le fils est t' et $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$

d. un nœud *fusion* t dont les fils sont t_1 et t_2.

Q15. En déduire la complexité de l'algorithme de programmation dynamique.