Complexité paramétrée

Christophe Paul, Ignasi Sau

Examen Mars 2013

Notes de cours autorisées. **2h30**

Note: La clarté, la concision et ainsi que la complétude des preuves seront prises en compte dans la notation. Le sujet est beaucoup trop long, n'essayer pas de tout faire, mais essayez d'attaquer au moins une question difficile, marquée par **(*)** ou **(**)**.

1 Réduction - $W[1]$-difficulté

Considérons le problème paramétré Grille Multicolorée suivant :

- *Entrée :* Soit H un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionné en k^2 classes de couleurs $C_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$.
- *Question :* H contient-il un sous-graphe (induit) isomorphe à une grille multicolorée $k \times k$ – i.e. dont le sommet $v_{i,j} \in c_{i,j}$?

Nous proposons d'établir une réduction à partir du problème clique multicolorée

- *Entrée :* Soit G un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionné en k classes de couleurs V_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.
- *Question :* G contient-il une clique multicolorée de taille k – i.e. possédant exactement un sommet de chaque couleur ?

1. Nous construisons une instance H de grille multicolorée dont les sommets sont étiquetés par des paires de sommets d'une instance G de clique multicolorée : $v_{\{x,y\}} \in C_{i,j}$ si $i = j$ et $x = y$ ou si $i \neq j$ et xy est une arête de G. Autrement dit, une classe de couleur $C_{i,j}$ représente les arêtes incidentes à un sommet de V_i et de V_j.

   Comment définir les arêtes de H de sorte que l'existence d'une clique multicolorée (de taille k) implique l'existence d'une grille multicolorée de taille $k \times k$ dans H ? (*indication* : une arête de H reliera deux sommets représentant des arêtes incidentes à un sommet commun – définissez distinctement les arêtes sur les coordonnées en lignes et en colonnes)

2. Démontrez la validité de votre construction.

2 Noyaux

On s'intéresse au JEU DE BILLES COLORÉES suivant :

- *Entrée :*Soit B un ensemble de n billes valuées $\chi : B \to \mathbb{N}$ et colorées $\omega : B \to \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$ l'ensemble des couleurs. Soit σ une séquence – permutation – des billes de B.
- *Question :* Peut-on supprimer un ensemble $S \subseteq B$ de billes de poids total au plus $k \in \mathbb{N}$ (i.e. $\omega(S) = \sum_{b \in S} \omega(b) \leqslant k$ tel que les billes d'une même couleurs dans la séquence résultante soient consécutives ?

1. **Règle 1 :** Montrer que toute paires de billes consécutives b_1 et b_2 de même couleur – $\chi(b_1) = \chi(b_2) = c \in \mathcal{C}$ – peuvent être remplacées par une nouvelle bille de c et poids $\omega(b_1) + \omega(b_2)$.
2. Une couleur est dite *saine* si elle ne colore qu'une seule bille, *malsaine* sinon.
   (a) Est-il possible de supprimer une bille ayant une couleur saine ? Si oui justifiez votre réponse par une preuve, sinon expliquez pourquoi (contre-exemple).
   (b) **Règle 2 :** Montrer que si b_1 et b_2 sont deux billes consécutives ayant chacune une couleur saine, il est possible de recolorer b_1 avec $\chi(b_2)$ (sans changer le poids) ? Si oui justifiez votre réponse par une preuve, sinon expliquez pourquoi (contre-exemple).
3. **Règle 3 :** Montrer que s'il existe au moins $2k + 1$ couleurs malsaines, alors l'instance est négative.
4. Déterminer le nombre maximum de billes d'une instance réduite par les règles précédentes.
5. Une instance réduite par les règles précédentes est-elle un noyau ? (*indication :* quelle est la taille d'un codage d'une instance de n billes dont le poids maximum est M ?) Si oui, justifiez votre réponse, si non ajoutez une règle permettant d'obtenir un noyau que vous démontrerez.

3 PROPRIÉTÉS DES DÉCOMPOSITIONS EN BRANCHES

1. Démontrez que si (T, μ) est une décomposition en branches d'un graphe G, et $e \in E(T)$ avec $\texttt{middle-set}(e) \geq 1$, alors $\texttt{middle-set}(e)$ est un séparateur de G.
2. Si l'on peut résoudre un certain problème Π sur un graphe G en temps $2^{O(\texttt{bw}(G))} \cdot |V(G)|^{O(1)}$, est-ce que l'on peut toujours résoudre le même problème Π sur G en temps $2^{O(\texttt{tw}(G))} \cdot |V(G)|^{O(1)}$? (Ici, $\texttt{tw}(G)$ est la largeur arborescente de G.) Et vice versa ?

4 ALGORITHMES EFFICACES DANS LES GRAPHES PLANAIRES (BIDIMENSIONALITÉ)

1. Donnez un exemple de deux graphs G et H tels que G contient H en tant que *mineur*, G ne contient pas H en tant que *contraction*, et G n'a pas de triangles.
2. Est-ce que l'ensemble de toutes les *forêts* est une classe de graphes fermée par mineurs ? Et l'ensemble de tous les *arbres* ? Dans le deux cas, votre réponse doit être justifiée soit par une preuve, soit par un contrexemple.

Soit Π_1 le problème suivant :

- *Entrée :* Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $k \in \mathbb{N}$,
- *Question :* Existe-t-il un sous-ensemble $S \subseteq V$ avec $|S| \leqslant k$ tel que toute arête $e \in E$ a au moins une extrémité dans S ?

On définit pour un graphe G le paramètre $\mathbf{P}_1(G)$ comme le plus petit entier k tel que la réponse au problème Π_1 avec entrée (G, k) est positive.

3. Est-ce que le paramètre $\mathbf{P}_1$ est fermé par mineurs ? Est-il fermé par contractions ?

4. Soit R_r la $(r \times r)$-grille. Démontrez que $\mathbf{P}_1(R_r) \geqslant r^2/2$.

5. Prouvez que pour tout graphe *planaire* G, il existe une contante α telle que

$$\texttt{bw}(G) \leqslant \alpha \cdot \sqrt{\mathbf{P}_1(G)}.$$

   Idée : Utilisez les réponses aux questions 3 et 4 et le fait qu'un graphe planaire G avec $\texttt{bw}(G) \geqslant \ell$ contient $R_{\ell/3}$ en tant que mineur.

6. $(*)$ Soit G un graphe planaire avec n sommets. On suppose que, en étant donnée une *sphere-cut-décomposition* (T, μ) de G de largeur ω, on sait calculer la valeur de $\mathbf{P}_1(G)$ en temps $2^{O(w)} \cdot n^{O(1)}$. Utilisez cette hypothèse et la réponse à la question 5 pour donner un algorithme qui résout le problème paramétré Π_1 en temps $2^{O(\sqrt{k})} \cdot n^{O(1)}$.